

Proseminář z lineární algebry

přednáška 11

Vlastní čísla a vektory

Vlastní čísla

$\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ a $x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0$ je odpovídající vlastní vektor, pokud $Ax = \lambda x$

geometrická interpretace – vlastní číslo a vektor lin. zobrazení: $f(x) = \lambda x$ – zachování směru a přeskálování

charakterizace vlastních čísel a vektorů

- ▶ λ vl. číslo, pokud $\det(A - \lambda I_n) = 0$
- ▶ $x \neq 0$ vl. vektor, pokud $x \in \text{Ker}(A - \lambda I_n)$

Charakteristický polynom

charakteristický polynom matice A je $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$

vlastní čísla A jsou právě kořeny charakteristického polynomu $P_A(\lambda)$

je-li λ vl. číslo matice A , pak $\bar{\lambda}$ je také vl. číslo A

- ▶ algebraická násobnost – násobnost kořene char. polynomu
- ▶ geometrická násobnost – počet lin. nezávislých vl. vektorů, tj. $\dim(\text{Ker}(A - \lambda I_n))$

platí $\text{alg.n.}(\lambda) \geq \text{geom.n.}(\lambda) \geq 1$

má-li matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ vl. čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, pak

- ▶ $\det(A) = \lambda_1 \dots \lambda_n$
- ▶ $\text{trace}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$

Vlastnosti vlastních čísel

jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vl. čísla matice A a $x_1, \dots, x_n$ odpovídající vl. vektory, pak

- ▶ A regulární právě tehdy, když 0 není mezi vl. čísly
- ▶ je-li A regulární, pak A^{-1} má vl. čísla $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$ s vl. vektory $x_1, \dots, x_n$
- ▶ A^2 má vl. čísla $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ s vl. vektory $x_1, \dots, x_n$
- ▶ pak αA má vl. čísla $\alpha\lambda_1, \dots, \alpha\lambda_n$ s vl. vektory $x_1, \dots, x_n$
- ▶ pak $A + \beta I_n$ má vl. čísla $\lambda_1 + \beta, \dots, \lambda_n + \beta$ s vl. vektory $x_1, \dots, x_n$
- ▶ pak A^T má vl. čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (ale vl. vektory jsou obecně jiné)

Výpočet vlastních čísel

hledání vlastních čísel matice lze převést na hledání kořenů polynomu a naopak
používají se numerické metody pro výpočet vlastních čísel

Cayleyho–Hamiltonova věta

Věta

bud' $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ a $P_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$, pak

$$(-1)^n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I_n = 0$$

Důsledek

mějme $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, potom

- ▶ $\forall k \in \mathbb{N} : A^k \in \text{span}(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$
- ▶ je-li A regulární, pak $A^{-1} \in \text{span}(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$