

Proseminář z lineární algebry

přednáška 10

Determinanty matic

Determinant

determinant čtvercové matice $A \in \mathbb{T}^{n \times n}$

$$\det(A) = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) a_{1,p(1)} \cdots a_{n,p(n)} = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{i=1}^n a_{i,p(i)}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{cases} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{cases}$$

Základní vlastnosti determinantu

determinant a traspozice

$$\det(A^T) = \det(A)$$

řádková linearita determinantu

A_{i+b} vznikne z A přičtením vektoru b k i -tému řádku,

$A_{i\leftarrow b}$ vznikne nahrazením i -tého řádku vektorem b

$$\det(A_{i+b}) = \det(A) + \det(A_{i\leftarrow b})$$

Vliv elementárních úprav

vynásobení i -tého řádku matice A číslem α ($\alpha \neq 0$)

$$\det(A') = \alpha \det(A)$$

výměna dvou řádků matice A

$$\det(A') = -\det(A)$$

přičtení α -násobku i -tého řádku k j -tému

$$\det(A') = \det(A)$$

Důsledky

pokud má matice A dva stejné řádky, pak $\det(A) = 0$

determinant lze počítat převedením matice do odstupňovaného tvaru, determinant trojúhelníkové matice je roven součinu prvků na diagonále

Věta

matice A je regulární právě tehdy, když $\det(A) \neq 0$

Multiplikativnost determinantu

Věta (Multiplikativnost determinantu)

mějme matice $A, B \in \mathbb{T}^{n \times n}$, pak platí

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

Důsledek

mějme regulární matici $A \in \mathbb{T}^{n \times n}$, pak platí

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$$

Laplaceův rozvoj

Věta

mějme matici $A \in \mathbb{T}^{n \times n}$, $n \geq 2$, $i \in \{1, \dots, n\}$, pak

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{ij})$$

kde A^{ij} značí matici vzniklou z A vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce

Laplaceův rozvoj

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$(-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{2+4} \cdot (-2) \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$- \left((-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$- 2 \left((-1)^{2+2} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$-(3 + 3) - 2(2 \cdot 3 - (-3)) = -24$$

Cramerovo pravidlo

mějme A regulární (čtvercovou) matici a b vektor odpovídající délky,
pak řešení soustavy $Ax = b$ splňuje

$$x_i = \frac{\det(A_{*i \leftarrow b})}{\det(A)}, \quad i = 1, \dots, n$$

kde $A_{*i \leftarrow b}$ je matice vzniklá z A nahrazením i -tého sloupce vektorem b

Geometrická interpretace determinantu

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a uvažme rovnoběžnostěn s hranami danými řádky matice A
pak jeho objem je roven $\sqrt{\det(AA^T)}$

pro případ $m = n$ je objem $|\det(A)|$

objem obrazu jednotkové krychle při zobrazení v $\mathbb{R}_n$ daném $f(x) = Ax$ je $|\det(A)|$