

Proseminář z lineární algebry

přednáška 9

Skalární součin a ortogonalita

Skalární součin

V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ (resp. nad $\mathbb{C}$), zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \mapsto \mathbb{R} \text{ } (\mathbb{C})$

- ▶ $\forall x \in V : \langle x, x \rangle \geq 0$ a rovnost pouze pro $x = 0$
- ▶ $\forall x, y, z \in V : \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- ▶ $\forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \forall x, y \in V : \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
- ▶ $\forall x, y \in V : \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (resp. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$)

standardní skalární součin

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{v prostoru } \mathbb{R}^n$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \quad \text{v prostoru } \mathbb{C}^n$$

Norma

norma indukovaná skalárním součinem

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

norma obecně $|| \cdot || : V \mapsto \mathbb{R}$

- ▶ $\forall x \in V : ||x|| \geq 0$ a rovnost pouze pro $x = 0$
- ▶ $\forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \forall x \in V : ||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$
- ▶ $\forall x, y \in V : ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

$$||x||_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \text{ pro } x \in \mathbb{R}^n, p = 1, 2, \dots$$

$p = 2$ euklidovská norma, $p = 1$ součtová (manhattanská) norma, $p \rightarrow \infty$ maximová (Čebyševova) norma

Kolmost

vektory $x, y \in V$ jsou kolmé, pokud $\langle x, y \rangle = 0$, značíme $x \perp y$

Věta (Pythagorova)

$x, y \in V$ kolmé, pak $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

nad $\mathbb{R}$ platí i opačná implikace, nad $\mathbb{C}$ nikoli

Věta (Cauchyho–Schwarzova nerovnost)

$x, y \in V$, pak $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

pro standardní skal. součin na $\mathbb{R}^n$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)$$

Ortonormální báze

systém vektorů $z_1, \dots, z_n \in V$ je

- ▶ ortogonální, pokud $\forall i \neq j : z_i \perp z_j$
- ▶ ortonormální, pokud $\forall i \neq j : z_i \perp z_j$ a $\forall i : \|z_i\| = 1$

je-li systém $z_1, \dots, z_n \in V$ ortonormální, jsou vektory lineárně nezávislé

Věta (Fourierovy koeficienty)

je-li $z_1, \dots, z_n$ ortonormální báze V , pak $\forall x \in V : x = \sum_{i=1}^n \langle x, z_i \rangle z_i$

- ▶ každý kon. generovaný vektorový prostor se skal. součinem má ortonormální bázi
- ▶ každý ortonormální systém v kon. generovaném vektorovém prostoru lze rozšířit na ortonormální bázi

Gramova-Schmidtova ortogonalizace

vstup: $x_1, \dots, x_n \in V$ lineárně nezávislé

algoritmus:

1. for $k = 1$ to n do
2. $y_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle x_k, z_i \rangle z_i$
3. $z_k = \frac{y_k}{\|y_k\|}$
4. end for

výstup: $z_1, \dots, z_n \in V$ ortonormální

splňující $\forall k \in \{1, \dots, n\} : \text{span}(x_1, \dots, x_k) = \text{span}(z_1, \dots, z_k)$

Ortogonalní doplněk

$M \subseteq V$, pak ortogonální doplněk množiny M je $M^\perp = \{x \in V \mid \forall y \in M : x \perp y\}$

- ▶ $M^\perp \subseteq V$
- ▶ je-li $M \subseteq N$, pak $N^\perp \subseteq M^\perp$
- ▶ $M^\perp = \text{span}(M)^\perp$

je-li U podprostor V

- ▶ $(U^\perp)^\perp = U$
- ▶ $U \cap U^\perp = \{0\}$
- ▶ $U + U^\perp = V$
- ▶ $\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$

$z_1, \dots, z_m$ ortonorm. báze U , $z_1, \dots, z_m, \dots, z_n$ její rozšíření na ortonorm. bázi V ,
pak $z_{m+1}, \dots, z_n$ je ortonorm. báze $U^\perp$

Ortogonální projekce

$U \subseteq V$, projekce $x \in V$ do U je $x_U \in U$ takový, že $x - x_U \in U^\perp$
to je ekvivalentní vztahu

$$\|x - x_U\| = \min_{y \in U} \|x - y\|$$

je-li $z_1, \dots, z_m$ ortonormální báze U , pak

$$x_U = \sum_{i=1}^m \langle x, z_i \rangle z_i$$

vektor $x' = x - x_U$ je projekcí x do $U^\perp$

Ortogonální doplněk a projekce v maticových prostorech

pro $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je $\mathcal{R}(A)^\perp = \text{Ker}(A)$

- ▶ $\text{Ker}(A^T A) = \text{Ker}(A)$
- ▶ $\mathcal{R}(A^T A) = \mathcal{R}(A)$
- ▶ $\text{rank}(A^T A) = \text{rank}(A)$

Věta (Matice projekce)

mějme $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ hodnosti n , pak projekce vektoru $x \in \mathbb{R}^m$ do $S(A)$ je
$$x' = A(A^T A)^{-1} A^T x$$

Ortogonalní matice

$Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je ortogonální, pokud $Q^T Q = I_n$

ekvivalentní charakteristiky

- ▶ $QQ^T = I_n$
- ▶ $Q^T = Q^{-1}$
- ▶ Q^T ortogonální
- ▶ Q^{-1} ortogonální
- ▶ sloupce Q tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$
- ▶ řádky Q tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$

vlastnosti ortogonálních matic

- ▶ P, Q ortogonální (stejného řádu), pak PQ je také ortogonální
- ▶ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$
- ▶ $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|Qx\| = \|x\|$