

Proseminář z lineární algebry

přednáška 8

Lineární zobrazení

Lineární zobrazení

U, V vektorové prostory nad $\mathbb{T}$, $f : U \mapsto V$ je lineární zobrazení, pokud

- ▶ $\forall x, y \in U : f(x + y) = f(x) + f(y)$
- ▶ $\forall \alpha \in \mathbb{T} \forall x \in U : f(\alpha x) = \alpha f(x)$

z toho

- ▶ $f(o) = o$
- ▶ $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{T} \forall x_1, \dots, x_n \in U : f(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$

obraz a jádro

- ▶ $f(U) = \{f(x) | x \in U\}$ je podprostor V
- ▶ $\text{Ker}(f) = \{x \in U | f(x) = o\}$ je podprostor U
- ▶ f je prosté $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{o\} \Leftrightarrow \dim(f(U)) = \dim(U)$

Matice lineárního zobrazení

pro matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je zobrazení $f(x) = Ax$ lineární zobr. z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$

naopak

U, V vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{T}$,

$\dim(U) = n$ a B_U báze U , $\dim(V) = m$ a B_V báze V ,

pak existuje matice A typu $m \times n$ nad tělesem $\mathbb{T}$ taková,

že $\forall x \in U : [f(x)]_{B_V} = A[x]_{B_U}$ a značíme ji ${}_{B_V}[f]_{B_U}$

sloupce matice ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ jsou tvořeny souřadnicemi obrazů vektorů báze B_U vyjádřených vůči bázi B_V

jsou-li B_1, B_2 dvě báze U , pak se matice ${}_{B_2}[id]_{B_1}$ nazývá maticí přechodu od báze B_1 k bázi B_2

Skládání zobrazení

U, V, W vektorové prostory nad $\mathbb{T}$, B_U, B_V, B_W popořadě jejich báze
 $f : U \mapsto V, g : V \mapsto W$ lineární zobrazení

- ▶ složené zobrazení $g \circ f$ je lineární zobrazení
- ▶ $B_W[g \circ f]_{B_U} = B_W[g]_{B_V} \cdot B_V[f]_{B_U}$

Izomorfismus

lineární zobrazení $f : U \mapsto V$ je izomorfismus, pokud je vzájemně jednoznačné
pokud mezi prostory U a V existuje izomorfismus, říkáme, že jsou izomorfní

- ▶ je-li $f : U \mapsto V$ izomorfismus, pak $f^{-1} : V \mapsto U$ existuje a je izomorfismus
- ▶ jsou-li $f : U \mapsto V, g : V \mapsto W$ izomorfismy, pak $g \circ f$ je izomorfismus
- ▶ je-li $f : U \mapsto V$ izomorfismus, pak obraz libovolné báze U je báze V
- ▶ je-li $f : U \mapsto V$ izomorfismus, pak $\dim(U) = \dim(V)$

je-li $f : U \mapsto V$ izomorfismus a B_U, B_V báze U, V , pak

$${}_{B_U}[f^{-1}]_{B_V} = {}_{B_V}[f]_{B_U}^{-1}$$

V vektorový prostor dimenze n nad tělesem T , B báze V ,
pak $x \mapsto [x]_B$ je izomorfismus mezi prostory V a T^n

Dimenze jádra a obrazu

U, V vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{T}$, B_U báze U , B_V báze V , $A = {}_{B_V}[f]_{B_U}$

- ▶ $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\text{Ker}(A))$
- ▶ $\dim(f(U)) = \dim(\mathcal{S}(A)) = \text{rank}(A)$
- ▶ $\dim(U) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(f(U))$

Posunutí

posunutí o vektor $a \in \mathbb{R}^n$ je zobrazení $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ definované $f(x) = x + a$
posunutí není lineární zobrazení (vyjma případu $a = 0$)
uvažme $g : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^{n+1}$

$$g(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1 + a_1 x_{n+1}, \dots, x_n + a_n x_{n+1}, x_{n+1})$$

je lineární zobrazení s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a

$$g(x_1, \dots, x_n, 1) = (x_1 + a_1, \dots, x_n + a_n, 1)$$