

# Proseminář z lineární algebry

přednáška 6

Báze a dimenze

# Báze

- ▶  $v_1, \dots, v_n$  generátory  $V$ , pokud  $\text{span}(v_1, \dots, v_n) = V$
- ▶  $v_1, \dots, v_n$  báze  $V$ , pokud tvoří lineárně nezávislý systém generátorů

každý vektorový prostor má bázi

# Báze a souřadnice

- ▶  $v_1, \dots, v_n$  generátory  $V$ , pak každý vektor  $u \in V$  lze vyjádřit jako lin. kombinace  $v_1, \dots, v_n$  alespoň jedním způsobem
- ▶  $v_1, \dots, v_n$  lin. nezávislé, pak každý vektor  $u \in V$  lze vyjádřit jako lin. kombinace  $v_1, \dots, v_n$  nejvýše jedním způsobem
- ▶  $v_1, \dots, v_n$  báze  $V$ , pak každý vektor  $u \in V$  lze vyjádřit jako lin. kombinace  $v_1, \dots, v_n$  právě jedním způsobem

souřadnice vektoru  $u$  vůči bázi  $B = (v_1, \dots, v_n)$  jsou koeficienty z odpovídající lin. kombinace  $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ , značíme  $[u]_B = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$

## Lemma (O výměně)

*Bud'  $y_1, \dots, y_n$  systém generátorů  $V$  a  $x \in V$ ,  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$ . Pak pro každé  $k$  takové, že  $\alpha_k \neq 0$  je  $y_1, \dots, y_{k-1}, x, y_{k+1}, \dots, y_n$  systém generátorů  $V$ .*

## Věta (Steinitzova věta o výměně)

*Bud'  $V$  vektorový prostor,  $x_1, \dots, x_m$  lin. nezávislý systém ve  $V$  a  $y_1, \dots, y_n$  systém generátorů  $V$ . Pak  $m \leq n$  a existují různé indexy  $k_1, \dots, k_{n-m}$  takové, že  $x_1, \dots, x_m, y_{k_1}, \dots, y_{k_{n-m}}$  tvoří systém generátorů  $V$ .*

## Důsledek

*Všechny báze konečně generovaného vektorového prostoru jsou stejně velké.*

# Dimenze

dimenze konečně generovaného vektorového prostoru je mohutnost nějaké jeho báze

- ▶  $x_1, \dots, x_m$  lin. nezávislé vektory  $V$ , pak  $m \leq \dim(V)$ ; pokud  $m = \dim(V)$ , pak  $x_1, \dots, x_m$  tvoří bázi  $V$
- ▶  $y_1, \dots, y_n$  generátory  $V$ , pak  $n \geq \dim(V)$ ; pokud  $n = \dim(V)$ , pak  $y_1, \dots, y_n$  tvoří bázi  $V$

# Spojení

$U, V$  podprostory vektorového prostoru  $W$ , spojení podprostorů  $U$  a  $V$  je

$$U + V = \{u + v \mid u \in U, v \in V\}$$

pro spojení podprostorů platí

- ▶  $U + V = \text{span}(U \cup V)$
- ▶  $\dim(U + V) + \dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V)$