

Proseminář z lineární algebry

přednáška 5

Vektorové prostory

Vektorový prostor

$\mathbb{T}$ těleso, $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{T}$ s operacemi sčítání vektorů $+: V \times V \mapsto V$ a násobení vektoru skalárem $\cdot: \mathbb{T} \times V \mapsto V$ splňujícími

- ▶ $(V, +)$ je Abelova grupa
- ▶ $\forall v \in V: 1v = v$
- ▶ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{T} \forall v \in V: \alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$
- ▶ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{T} \forall v \in V: (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
- ▶ $\forall \alpha \in \mathbb{T} \forall u, v \in V: \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

vlastnosti

- ▶ $\forall v \in V: 0v = o$
- ▶ $\forall \alpha \in \mathbb{T}: \alpha o = o$
- ▶ $\forall \alpha \in \mathbb{T} \forall v \in V: \alpha v = o$ implikuje $\alpha = 0$ nebo $v = 0$
- ▶ $\forall v \in V: (-1)v = -v$

Podprostory

mějme vektorový prostor V nad tělesem $\mathbb{T}$, pak $U \subseteq V$ je podprostor prostoru V , pokud tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{T}$ se stejně def. operacemi

V vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$, pak $U \subseteq V$ je podprostor právě tehdy, když

- ▶ $o \in U$
- ▶ $\forall u, v \in U : u + v \in U$
- ▶ $\forall \alpha \in \mathbb{T} \forall u \in U : \alpha u \in U$

průnik libovolného systému podprostorů je podprostor

Lineární obal

V vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$, lineární obal množiny $X \subseteq V$ je

$$\text{span}(X) = \bigcap_{U: X \subseteq U \subseteq V} U$$

lineární kombinace vektorů $v_1, \dots, v_k \in V$ je výraz tvaru $\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i$, kde $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{T}$

mějme $v_1, \dots, v_k \in V$, pak

$$\text{span}(\{v_1, \dots, v_k \in V\}) = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{T} \right\}$$

Lineární nezávislost

vektory $v_1, \dots, v_k \in V$ jsou lineárně nezávislé, pokud $\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i = 0$ má jediné řešení $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$, v opačném případě jsou lineárně závislé

vektory $v_1, \dots, v_k \in V$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když $\exists j \in \{1, \dots, k\}$ takové, že $v_j = \sum_{i \neq j} \alpha_i v_i$ pro nějaké $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{T}$, tedy $v_j \in \text{span}(\{v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_k\})$

vektory $v_1, \dots, v_k \in V$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když $\exists j \in \{1, \dots, k\}$ takové, že

$$\text{span}(\{v_1, \dots, v_k\}) = \text{span}(\{v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_k\})$$