

Proseminář z lineární algebry

přednáška 3

Soustavy lineárních rovnic

Soustava lin. rovnic

soustava lin. rovnic (m rovnic, n neznámých)

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Matice soustavy

homogenní soustava

$$Ax = 0$$

matice soustavy

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nehomogenní soustava

$$Ax = b$$

rozšířená matice soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Elementární řádkové úpravy

- ▶ vynásobení i -tého řádku nenulovým číslem α
- ▶ přičtení i -tého řádku k j -tému
- ▶ prohození i -tého a j -tého řádku
- ▶ přičtení α -násobku i -tého řádku k j -tému

nemění množinu řešení dané soustavy

Matice element. úprav

provedení elementární úpravy lze realizovat jako násobení maticí (zleva)

vynásobení řádku nenulovým číslem α

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \alpha & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

přičtení jednoho řádku k jinému

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

posloupnost několika el. úprav odpovídá vynásobení maticí, která je součinem příslušných matic úprav

Gaussova eliminace

každou matici lze převést posloupností elementárních úprav do odstupňovaného tvaru

homogenní soustava:

pivot v každém sloupci $\Leftrightarrow$ soustava má právě jedno řešení $x = 0 \Leftrightarrow$ matice soustavy A je regulární

nehomogenní soustava:

- ▶ pivot ve sloupci pravých stran $\Leftrightarrow$ soustava nemá řešení
- ▶ pivot v každém sloupci vyjma sloupce pravých stran $\Leftrightarrow$ soustava má právě jedno řešení
- ▶ pivot není v některém sloupci A a není ve sloupci pravých stran $\Leftrightarrow$ nekonečně mnoho řešení

dalšími úpravami lze matici převést do redukovaného odstupňovaného tvaru, ten je určen jednoznačně, pozice pivotů se již nemění (Gaussova–Jordanova eliminace)

Regulární matice

Mějme $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, pak $\text{RREF}(A) = QA$ pro nějakou regulární matici $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

Mějme $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, pak je ekvivalentní:

1. A je regulární
2. pro nějaké $b \in \mathbb{R}^n$ má soustava $Ax = b$ jediné řešení
3. pro každé $b \in \mathbb{R}^n$ má soustava $Ax = b$ jediné řešení
4. $\text{rank}(A) = n$
5. $\text{RREF}(A) = I$

Důsledek

Každá $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se dá vyjádřit jako součin matic el. úprav.

Inverzní matice

Pro $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uvažme matici $(A|I_n)$ typu $n \times 2n$.

Pokud $\text{RREF}(A|I_n)$ má tvar $(I_n|B)$, pak $B = A^{-1}$. Jinak je A singulární.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$