

Proseminář z lineární algebry

přednáška 2

Matice

Matice

Matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je uspořádaná mn -tice reálných čísel

indexována pomocí řádků a sloupců

vektory lze chápat jako matice, jejichž jeden rozměr je 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1) \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sčítání a násobení

matice $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, číslo (skalár) $\alpha \in \mathbb{R}$

- ▶ $(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$
- ▶ $(\alpha A)_{ij} = \alpha A_{ij}$

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$A + 0 = A$$

$$A + (-1)A = 0$$

$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$$

$$1A = A$$

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

Násobení matic

matice $A, \in \mathbb{R}^{m \times p}, B \in \mathbb{R}^{p \times n}$, pak $AB \in \mathbb{R}^{m \times n}$ s prvky $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^p A_{ik} B_{kj}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \dots$$

				1	3	-1	0
				-1	0	1	-2
				3	2	2	0
2	-1	1		6	8	-1	2
-3	0	2		3	-5	7	0

Vlatnosti násobení matic

jednotková matice $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ taková, že $(I_n)_{ii} = 1$, ostatní prvky jsou 0

$$(AB)C = A(BC)$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(A + B)C = AC + BC$$

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$$

$$0A = A0 = 0$$

$$I_m A = A I_n = A$$

nekomutativita násobení

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Transpozice a symetrie

matice $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, pak transponovaná matice $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a $(A^T)_{ij} = A_{ji}$

matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je symetrická, pokud $A = A^T$

$$\begin{array}{ll} (A^T)^T = A & (A + B)^T = A^T + B^T \\ (\alpha A)^T = \alpha A^T & (AB)^T = B^T A^T \end{array}$$

Diagonální a trojúhelníkové matice

matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je

- ▶ diagonální, pokud $A_{ij} = 0$ pro všechna $i \neq j$
- ▶ horní trojúhelníková, pokud $A_{ij} = 0$ pro všechna $i > j$
- ▶ dolní trojúhelníková, pokud $A_{ij} = 0$ pro všechna $i < j$

odstupňovaný tvar matice (REF)

- ▶ $r \leq m, 1 \leq p_1 < \dots < p_r \leq n$
- ▶ $\forall i \leq r : A_{ip_i} \neq 0$ a $\forall j < p_i : A_{ij} = 0$
- ▶ $\forall i > r \forall j : A_{ij} = 0$

redukovaný odstupňovaný tvar matice (RREF)

- ▶ navíc $\forall i \leq r : A_{ip_i} = 1$ a $\forall j < i : A_{jp_i} = 0$

redukovaný odstupňovaný tvar matice je určen jednoznačně
počet pivotů se označuje jako hodnost matice, $\text{rank}(A)$

Regulární matice

matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je regulární, pokud $Ax = 0$ ($x \in \mathbb{R}^n$) pouze pro $x = 0$
čtvercová matice, která není regulární, se nazývá singulární matice

Tvrzení

pro $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí:

AB je regulární právě tehdy, když obě A i B jsou regulární

je-li A regulární, je i A^T regulární

Inverzní matice

matice $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je inverzní matice k matici pro $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, pokud $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

inverzní matice k A existuje právě tehdy, když A je regulární

$$\begin{aligned} (A^{-1})^{-1} &= A & (\alpha A)^{-1} &= \frac{1}{\alpha} A^{-1} \text{ (pro } \alpha \neq 0) \\ (A^{-1})^T &= (A^T)^{-1} & (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1} \end{aligned}$$