

Proseminář z lineární algebry

přednáška 1

Analytická geometrie

Přímka v rovině

přímka je určena dvěma body, resp. bodem a směrovým vektorem
parametrický popis – body A, B , směrový vektor $\vec{v} = B - A$

$$p = \{A + t \cdot \vec{v} | t \in \mathbb{R}\}$$

je-li $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2)$, pak $\vec{v} = (v_1, v_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ a přímka je tvořena body (x, y) :

$$\begin{aligned} x &= a_1 + tv_1 \\ y &= a_2 + tv_2 \end{aligned} \quad t \in \mathbb{R}$$

totéž funguje i v $\mathbb{R}^n$ pro $n \geq 3$

Přímka v rovině

směrníkový tvar:

$$y = \alpha x + \beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

případně $x = \alpha$ pro přímky rovnoběžné s osou y

úsekový tvar:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \quad (p, q \in \mathbb{R}, p \neq 0, q \neq 0)$$

pro přímky, které neprocházejí počátkem a nejsou rovnoběžné s žádnou z os

obecná rovnice přímky:

$$ax + by + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0))$$

normálový vektor (kolmý na směrový vektor) je (a, b)

je-li (v_1, v_2) směrový vektor, pak $(v_2, -v_1)$ je normálový vektor téže přímky

Vzájemná poloha přímk v rovině

přímky $p = A + t \cdot \vec{u}$ ($t \in \mathbb{R}$) a $q = b + s \cdot \vec{v}$ ($s \in \mathbb{R}$) jsou:

- ▶ rovnoběžné, pokud vektor $\vec{v}$ je násobkem vektoru $\vec{u}$, tj. $\exists k \in \mathbb{R}, k \neq 0 : \vec{v} = k \cdot \vec{u}$
- ▶ totožné, pokud jsou rovnoběžné a navíc $B \in p$, tj. $\exists t \in \mathbb{R} : B = A + t \cdot \vec{u}$
- ▶ různoběžné jinak, tedy vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ nejsou jeden násobkem druhého

určete vzájemnou polohu přímk

$$\begin{aligned} p &= (1, 0) + t \cdot (2, 1) \\ q &= (1, 1) + t \cdot (1, 3) \\ r &= (3, 2) + t \cdot (-4, -2) \\ s &= (0, -2) + t \cdot (1, 3) \end{aligned}$$

Vzájemná poloha přímek v rovině

přímky zadané obecnou rovnicí $p : ax + by + c = 0$ a $q : a'x + b'y + c' = 0$
soustava lineárních rovnic

- ▶ má právě jedno řešení – různoběžky
- ▶ má nekonečně mnoho řešení – totožné
- ▶ nemá řešení – rovnoběžky

Přímky v prostoru

analogicky funguje pouze parametrický popis

vzájemná poloha přímek v prostoru

přímky $p = A + t \cdot \vec{u}$ ($t \in \mathbb{R}$) a $q = b + s \cdot \vec{v}$ ($s \in \mathbb{R}$) jsou:

- ▶ rovnoběžné, pokud vektor $\vec{v}$ je násobkem vektoru $\vec{u}$
- ▶ případně totožné, pokud navíc $B \in p$
- ▶ různoběžné, pokud vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ nejsou jeden násobkem druhého a $p \cap q \neq \emptyset$
- ▶ mimoběžné, pokud vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ nejsou jeden násobkem druhého a $p \cap q = \emptyset$

Rovina v prostoru

určena

- ▶ třemi body
- ▶ bodem a dvěma vektory
- ▶ bodem a normálovým vektorem

parametrický popis roviny

$$\rho = A + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} \quad (r, s \in \mathbb{R})$$

obecná rovnice roviny

$$ax + by + cz + d = 0$$

normálový vektor $\vec{n} = (a, b, c)$, $\vec{n} \perp \vec{u}$, $\vec{n} \perp \vec{v}$

Vzájemná poloha rovin v prostoru

- ▶ rovnoběžné, pokud normálové vektory jsou jeden násobkem druhého, průnik je prázdný
- ▶ případně totožné, pokud navíc libovolný bod jedné náleží i druhé rovině, průnik je rovina
- ▶ různoběžné, pokud normálové vektory nejsou jeden násobkem druhého, průnik je přímka, její směrový vektor je kolmý na normálové vektory obou rovin

Skalární součin v $\mathbb{R}^n$

$$\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

základní vlastnosti skalárního součinu

- ▶ $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n : \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- ▶ $\forall \alpha \in \mathbb{R} \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n : (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$
- ▶ $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n : \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Euklidovská vzdálenost

délka vektoru (norma)

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

vzdálenost bodů (metrika)

$$\text{dist}(A, B) = |\vec{v}|, \text{ pro } \vec{v} = B - A$$

vlastnosti normy

- ▶ $|\vec{u}| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \mathbf{o}$
- ▶ $\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n : |\alpha \vec{u}| = |\alpha| \cdot |\vec{u}|$
- ▶ $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n : |\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$ (trojúhelníková nerovnost)

Vektorový a smíšený součin v $\mathbb{R}^3$

vektorový součin

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

smíšený součin

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

vlastnosti vektorového a smíšeného

- ▶ $\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n : (\alpha \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha \vec{v}) = \alpha(\vec{u} \times \vec{v})$
- ▶ $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n : \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
- ▶ $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n : \vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
- ▶ $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n : (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$