Proseminář z matematiky

Spojitá rozdělení

Distribuce náhodné veličiny

Reálná náhodná veličina $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$

Distribuční funkce náhodné veličiny X je $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$, pro kterou platí $F_X(x) = P(X \leq x)$.

Vlastnosti distribuční funkce:

- F_X je neklesající
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

Hustota náhodné veličiny

f_X je nazývá hustoutou náhodné veličiny X: $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\ dx$

pak $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\ dx$

Střední hodnota (spoj. náh. veličiny X)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\ dx$$

(pokud tento integrál má smysl)

Rozptyl

$$var(X) = E((X - EX)^2) = E(X^2) - (EX)^2$$

kde $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x)\ dx$

Uniformní rozdělení

Uniformní rozdělení na intervalu $[a, b]$
$f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ pro $x \in [a, b]$, jinak je $f_X(x) = 0$
distribuční funkce je

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & b < x \end{cases} \\
E(X) &= \ldots = \frac{b+a}{2} \\
E(X^2) &= \ldots = \frac{b^2 + ba + a^2}{3} \\
var(X) &= \ldots = \frac{(b-a)^2}{12}
\end{aligned}
$$

Exponenciální rozdělení

Exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda > 0$

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & 0 \leq x \end{cases} \\
f_X(x) &= \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x} & 0 \leq x \end{cases} \\
E(X) &= \ldots = \frac{1}{\lambda} \\
E(X^2) &= \ldots = \frac{2}{\lambda^2} \\
var(X) &= \ldots = \frac{1}{\lambda^2}
\end{aligned}
$$

Normální rozdělení

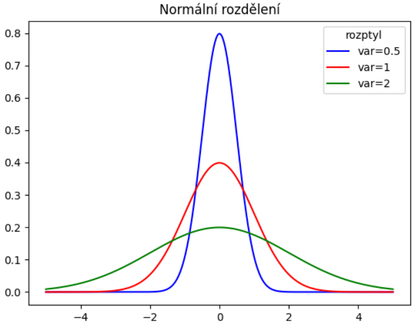
$N(0,1)$:
hustota $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$
distribuční funkce $\Phi(x)$ nemá vzorec a lze spočítat numericky

obecné $N(\mu, \sigma)$:

$$X \sim N(\mu, \sigma) \leftrightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

tedy $N(\mu, \sigma)$ má hustotu $\frac{1}{\sigma}\varphi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

μ je střední hodnota a σ^2 rozptyl

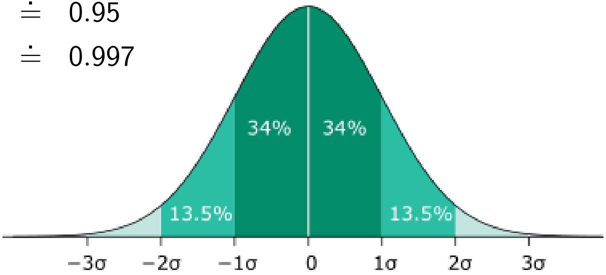


Normální rozdělení

odolnost vůči součtu:
$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i), i = 1, \ldots, k$, pak $X = X_1 + \ldots + X_k \sim N(\mu, \sigma)$,
$\mu = \mu_1 + \ldots + \mu_k$ a $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_k^2$

pravidlo 3σ:
pro $X \sim N(\mu, \sigma)$

$$
\begin{aligned}
P(|X - \mu| < \sigma) &\doteq 0.68 \\
P(|X - \mu| < 2\sigma) &\doteq 0.95 \\
P(|X - \mu| < 3\sigma) &\doteq 0.997
\end{aligned}
$$



Cauchyho rozdělení

hustota $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ sudá funkce, připomíná (trochu rozpláclé) normální rozdělení

distribuční funkce je $F(x) = \frac{1}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2}$

pro libovolné kladné t je $\int_{-t}^{t} x \cdot f(x)\ dx = 0$, ale $\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\ dx$ neexistuje, takže nemá def. střední hodnotu

χ^2 rozdělení

rozdělení součtu druhých mocnin nezávislých normálně rozdělených náhodných veličin $X_1, \dots, X_k \sim N(0,1)$: $Q = \sum_{i=1}^{k} X_i^2$ má rozdělení χ^2 s k stupni volnosti

$E(Q) = k, var(Q) = 2k$