

Proseminář z matematiky

Diskrétní pravděpodobnost

Pravděpodobnostní prostor

Konečný pravděpodobnostní prostor $(\Omega, 2^\Omega, P)$

- ▶ prvky Ω (resp. jednoprvkové podmnožiny) jsou elementární jevy
- ▶ podmnožiny Ω jsou jevy
- ▶ $P : 2^\Omega \mapsto [0, 1]$
- ▶ pro $A \subseteq \Omega$ je $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$
- ▶ $P(\Omega) = 1$

Náhodná proměnná

Reálná náhodná proměnná (veličina) $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$

Střední hodnota

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\}) \\ &= \sum_{x \in \text{Im}(X)} x \cdot P(X = x) \end{aligned}$$

Linearita střední hodnoty

$$\begin{aligned} E(\alpha X) &= \alpha EX \\ E(X + Y) &= EX + EY \end{aligned}$$

Pozor: $E(XY) = EX \cdot E(Y)$ garantováno jen pro X, Y nezávislé

Rozptyl

Rozptyl

$$\text{Var}(X) = E((X - EX)^2) = E(X^2) - (EX)^2$$

Platí

$$\text{Var}(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \text{Var}(X)$$

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) \quad \text{pro } X, Y \text{ nezávislé}$$

Kovariance a korelace

Kovariance dvojice náhodných veličin X, Y

$$\text{cov}(X, Y) = E((X - EX)(Y - EY)) = E(XY) - EX \cdot EY$$

$\text{cov}(X, Y) = 0$, pokud jsou X, Y nezávislé

Korelace

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$$

pokud jsou X a Y nezávislé, je $\rho = 0$

obecně platí $-1 \leq \rho \leq 1$

Bernouliho (alternativní) rozdělení

0, 1-náhodná veličina, použití jako indikátor náh. jevu

$Alt(p)$:

$$P(X = 1) = p$$

$$P(X = 0) = 1 - p$$

$$EX = p$$

$$Var(X) = p(1 - p)$$

Binomické rozdělení

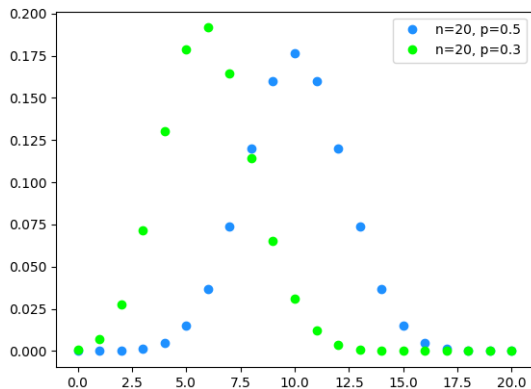
Počet úspěchů při n nezávislých opakováních téhož experimentu.

$\text{Binom}(n, p)$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \text{ pro } k = 0, 1, \dots, n$$

$$EX = np$$

$$\text{Var}(X) = np(1 - p)$$



Hypergeometrické rozdělení

V osudí a bílých a b černých míčků, bez vracení vylosuji n . Kolik z nich je bílých?

$Hyper(a, b, n) :$

$$P(X = k) = \frac{\binom{a}{k} \binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}} \text{ pro } k = \max(0, n - b), \dots, \min(n, a)$$

$$EX = n \cdot \frac{a}{a+b}$$

$$Var(X) = n \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a+b-n}{a+b-1}$$

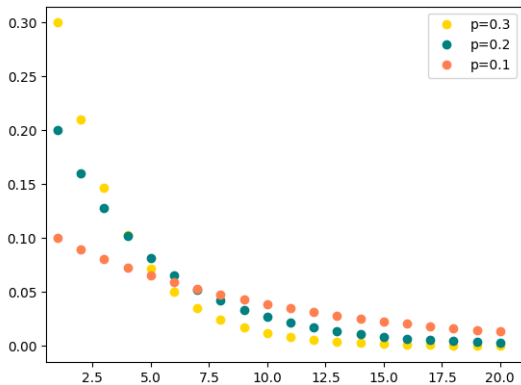
Geometrické rozdělení

Kolikátým opakováním dosáhnu poprvé úspěchu?

$Geom(p)$:

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1} \text{ pro } k = 1, 2, \dots$$

$$EX = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - p)^n = \frac{1}{1 - (1 - p)} = \frac{1}{p}$$



Poissonovo rozdělení

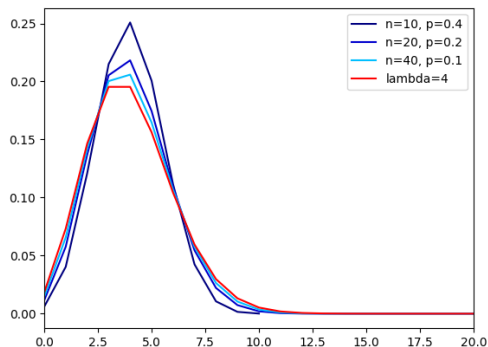
limitní verze binomického rozdělení

$Pois(\lambda)$:

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \text{ pro } k = 0, 1, \dots$$

$$EX = \lambda$$

$$Var(X) = \lambda$$



$Pois(\lambda)$ je limitou $Binom(n, \frac{\lambda}{n})$, $n \rightarrow \infty$