

Matematické dovednosti

Důkazové techniky podruhé

Axiomatický systém

Hilbertův systém používá tři základní axiomy (schémata axiomů):

$$(Ax1) (\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)),$$

$$(Ax2) ((\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \sigma)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \sigma))),$$

$$(Ax3) ((\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)),$$

a odvozovací pravidlo modus ponens:

(MP) z formulí φ a $(\varphi \Rightarrow \psi)$ odvodíme ψ .

Důkaz

Tvrzení

Pro každou formuli φ platí $\vdash (\varphi \Rightarrow \varphi)$.

Důkaz:

1. $(\varphi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi))$ (Ax2)
2. $\varphi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi)$ (Ax1)
3. $(\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi)$ (MP 1+2)
4. $\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi)$ (Ax1)
5. $\varphi \Rightarrow \varphi$ (MP 3+4)

Kolečka

vstup:	\ominus	\oplus		
<hr/>				
pravidla:	\ominus	\rightarrow	\otimes	
	\ominus	\rightarrow	\oplus	\ominus
	\otimes	\rightarrow	\ominus	\oplus
<hr/>				
cíl:	\oplus	\otimes	\oplus	\oplus

Řešení:

\ominus	\oplus			
\otimes	\oplus			(P1)
\ominus	\oplus	\oplus		(P3)
\oplus	\ominus	\oplus	\oplus	(P2)
\oplus	\otimes	\oplus	\oplus	(P1)

Kolečka

vstup:	\oplus				
<hr/>					
pravidla:	\ominus	\rightarrow	\ominus	\oplus	
	\ominus	\rightarrow	\otimes	\ominus	
	\oplus	\rightarrow	\otimes	\oplus	
	\oplus	\rightarrow	\oplus	\ominus	
<hr/>					
cíl:	\otimes	\oplus	\otimes	\ominus	\oplus

vstup:	\ominus				
<hr/>					
pravidla:	\ominus	\rightarrow	\ominus	\oplus	
	\ominus	\rightarrow	\otimes	\ominus	
	\oplus	\rightarrow	\otimes	\oplus	
	\oplus	\rightarrow	\oplus	\ominus	
<hr/>					
cíl:	\otimes	\oplus	\otimes	\ominus	\oplus

Kolečka

vstup:	\ominus	\oplus		
<hr/>				
pravidla:	\ominus		\rightarrow	\otimes \oplus
	\otimes		\rightarrow	\ominus
	\oplus	\oplus	\rightarrow	\otimes
<hr/>				
cíl:	\otimes	\oplus	\ominus	

Kolečka

vstup:	\ominus	\oplus	\oplus			
<hr/>						
pravidla:	\ominus	\ominus	\ominus	\rightarrow	\oplus	\oplus
	\oplus			\rightarrow	\ominus	\oplus
	\oplus	\ominus		\rightarrow	\oplus	
<hr/>						
cíl:	\oplus	\ominus	\ominus	\oplus	\oplus	\oplus