Matematické dovednosti

Množiny

Množiny

Prázdná množina $\emptyset$

- $(\forall x)\ x \notin \emptyset$
- $\emptyset = \{\} \neq \{\emptyset\}$

Číselné množiny (obory)

- $\mathbb{N}, (\mathbb{N}_0), \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Intervaly reálných čísel

- $[a, b]$
- (a, b)
- $[a, +\infty)$

Popis množiny

Výčtem prvků

- $\{x\}$
- $\{a, b, c\}$
- $\{1, 2, \ldots, n\}$
- $\{3, 5, 7, \ldots\}$

Vydělení vlastností

- $\{x \in M | V(x)\}$
- $\{d \in \mathbb{N} | d \backslash n\}$
- $\{x \in \mathbb{R} | x^2 \in \mathbb{Z}\}$

Obor hodnot funkce

- $\{f(x) | x \in D\} = \{y | (\exists x \in D)\ y = f(x)\}$
- $\{2k | k \in \mathbb{Z}\} = \{n \in \mathbb{Z} | \exists k \in \mathbb{Z} : n = 2k\} = \{n \in \mathbb{Z} | 2 \backslash n\}$

Russelův paradox

Proč lze vlastností popisovat pouze podmnožiny jiné množiny a ne definovat zcela nové množiny?

Kdyby to šlo, definujme $m = \{x | x \notin x\}$.

Je taková m svým prvkem?

$$
\begin{aligned}
m \in m \quad &\Rightarrow \quad m \notin m \\
m \notin m \quad &\Rightarrow \quad m \in m
\end{aligned}
$$

Množinové operace

- **sjednocení** $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$
- průnik $A \cap B = \{x \in A | x \in B\}$
- rozdíl $A \setminus B = \{x \in A | x \notin B\}$
- symetrický rozdíl $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
- doplněk $\overline{A} = \{x | x \notin A\}$
- **potenční množina** $2^A = \{x | x \subseteq A\}$
- kartézský součin $A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$
- velké **sjednocení** a průnik

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x | \exists i \in I: \ x \in A_i\} \qquad \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \{x | \forall k \in \mathbb{N}: \ x \in B_k\}$$

- mohutnost množiny $|A|$

Vlastnosti operací

$A \cup A = A \cap A = A \cup \emptyset = A$
$A \cap \emptyset = A \setminus A = A \Delta A = \emptyset$

komutativita sjednocení, průniku a sym. rozdílu
$A \cup B = B \cup A \ldots$

asociativita sjednocení, průniku a sym. rozdílu
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \ldots$

distributivita sjednocení vůči průniku a naopak
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

de Morganovy vzorce
$A \setminus (\bigcup_i B_i) = \bigcap_i (A \setminus B_i)$
$A \setminus (\bigcap_i B_i) = \bigcup_i (A \setminus B_i)$