Matematické dovednosti

Výroky, základy logiky

Výroky

Co je to výrok?

- Tento týden není žádný státní svátek.
- Každé přirozené číslo je sudé.
- Pozor!
- Druhá mocnina reálného čísla je vždy nezáporná.
- Je toto výrok?

Logické spojky

- negace: $\neg A$
- konjunkce: $A \wedge B$
- disjunkce: $A \vee B$
- implikace: $A \Rightarrow B$
- ekvivalence: $A \Leftrightarrow B$

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Vlastnosti logických spojek

- komutativita:
  $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$ $\quad$ $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$
- asociativita:
  $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$ $\quad$ $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$
- distributivita:
  $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ $\quad$ $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- obměna implikace:
  $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$

Negace složených výroků

- $\neg(\neg A) \equiv A$
- $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$
- $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$
- $\neg(A \Rightarrow B) \equiv (A \wedge \neg B)$

Vlastnosti ekvivalence:

- $(A \Leftrightarrow B) \equiv (\neg A \Leftrightarrow \neg B)$
- $\neg(A \Leftrightarrow B) \equiv (\neg A \Leftrightarrow B) \equiv (A \Leftrightarrow \neg B) \equiv (A \ xor \ B)$

Kvantifikátory

- všeobecný, velký: $\forall$
- existenční, malý: $\exists$
- zesílený existenční: $\exists!$

Negování kvantifikátorů:

- $\neg(\forall x)A(x) \equiv (\exists x)\neg A(x)$
- $\neg(\exists x)A(x) \equiv (\forall x)\neg A(x)$

Kvantifikace přes množinu:

- $\forall x \in M : A(x) \equiv (\forall x)(x \in M \Rightarrow A(x))$
- $\exists x \in M : B(x) \equiv (\exists x)(x \in M \wedge B(x))$

Pořadí kvantifikátorů

$(\forall x)(\forall y)A(x,y)$	vs	$(\forall y)(\forall x)A(x,y)$
$(\exists x)(\exists y)A(x,y)$	vs	$(\exists y)(\exists x)A(x,y)$
$(\forall x)(\exists y)A(x,y)$	vs	$(\exists y)(\forall x)A(x,y)$

Pořadí kvantifikátorů

$$(\forall x)(\forall y)A(x,y) \quad \equiv \quad (\forall y)(\forall x)A(x,y)$$

$$(\exists x)(\exists y)A(x,y) \quad \equiv \quad (\exists y)(\exists x)A(x,y)$$

$$(\forall x)(\exists y)A(x,y) \quad \not\equiv \quad (\exists y)(\forall x)A(x,y)$$

Kvantifikování složených výroků

$(\forall x)(A(x) \wedge B(x))$ vs $((\forall x)A(x) \wedge (\forall x)(B(x))$

$(\forall x)(A(x) \vee B(x))$ vs $((\forall x)A(x) \vee (\forall x)(B(x))$

$(\exists x)(A(x) \vee B(x))$ vs $((\exists x)A(x) \vee (\exists x)(B(x))$

$(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$ vs $((\exists x)A(x) \wedge (\exists x)(B(x))$

Kvantifikování složených výroků

$$
\begin{array}{ccc}
(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) & \equiv & ((\forall x)A(x) \wedge (\forall x)(B(x)) \\
(\forall x)(A(x) \vee B(x)) & \not\equiv & ((\forall x)A(x) \vee (\forall x)(B(x)) \\
(\exists x)(A(x) \vee B(x)) & \equiv & ((\exists x)A(x) \vee (\exists x)(B(x)) \\
(\exists x)(A(x) \wedge B(x)) & \not\equiv & ((\exists x)A(x) \wedge (\exists x)(B(x))
\end{array}
$$