Matematické dovednosti

Množiny

Množiny

Prázdná množina $\emptyset$

- $(\forall x)\ x \notin \emptyset$
- $\emptyset = \{\} \neq \{\emptyset\}$

Číselné množiny (obory)

- $\mathbb{N}, (\mathbb{N}_0), \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Popis množiny

Výčtem prvků

- $\{x\}$
- $\{a, b, c\}$
- $\{1, 2, \ldots, n\}$
- $\{1, 3, 5, \ldots\}$

Vydělení vlastností

- $\{x \in M | V(x)\}$
- $\{z \in \mathbb{Z} | 2 \backslash z\}$
- $\{k \in \mathbb{N} | k \leq n\}$
- $\{x \in \mathbb{R} | x^2 \in \mathbb{Z}\}$

Zápisy množin

Intervaly reálných čísel

- $[a, b]$
- (a, b)
- $[a, +\infty)$

Zapište

1. množinu celých čísel, jejichž odmocnina je celočíselná,
2. množinu celých čísel, která jsou dělitalná 3 nebo 5,
3. množinu racinálních čísel, jejichž druhá mocnina má kladný cosinus,
4. množinu reálných čísel, která nejsou odmocninou z racionálního čísla,
5. množinu komplexních čísel, jejichž třetí mocnina má nulovou reálnou složku.

Obor hodnot funkce

$$\{f(x)|x \in D\} = \{y|(\exists x \in D)y = f(x)\}$$

Zapište

1. množinu druhých mocnin přirozených čísel,
2. množinu sudých celých čísel,
3. množinu celých čísel, která dávají zbytek 1 po dělení pěti,
4. množinu čísel, která jsou odmocninou z lichého přirozeného čísla,
5. množinu čísel, ktará lze psát jako součet čísla z množiny A s číslem z množiny B.

Zápisy množin

Zapište

1. množinu všech trojciferných přirozených čísel,
2. množinu racionálních čísel, která lze zapsat ve tvaru s kladným jmenovatelem menším než 12,
3. množinu prvočísel,
4. množinu druhých mocnin jednociferných prvočísel,
5. množinu přirozených čísel, která mají právě tři (resp. 123) různé přirozené dělitele.

Množinové operace

- sjednocení $A \cup B$
- průnik $A \cap B$
- rozdíl $A \setminus B$
- symetrický rozdíl $A \Delta B$
- doplněk $\overline{A}$
- potenční množina 2^A
- kartézský součin $A \times B$
- velké sjednocení a průnik

$$\bigcup_{i \in I} A_i \qquad \text{a} \qquad \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$$

- mohutnost množiny $|A|$

Vlastnosti operací

$A \cup A = A \cap A = A \cup \emptyset = A$
$A \cap \emptyset = A \setminus A = A \Delta A = \emptyset$

komutativita sjednocení, průniku a sym. rozdílu
$A \cup B = B \cup A \ldots$

asociativita sjednocení, průniku a sym. rozdílu
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \ldots$

distributivita sjednocení vůči průniku a naopak
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

de Morganovy vzorce
$A \setminus (\bigcup_i B_i) = \bigcap_i (A \setminus B_i)$
$A \setminus (\bigcap_i B_i) = \bigcup_i (A \setminus B_i)$

Příklady

Kolik prvků mají následující množiny:

1. $\{a, b, c, \{a, b, c\}, \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{\{a\}\}, \{c, b, a\}\}$,
2. $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\}, \{\{\}, \{\}\}\}$,
3. $\{x, y, z\} \cup \{z, y, x\} \cup \{x, \{y, z\}\} \cup \{\{y\} \cup \{z\}\}$,
4. $\{1\} \cup \{1, 1\} \cup \{1, \{1\}, 1\} \cup \{1, \{1, 1\}, 1\} \cup \{1, \{1, \{1\}, 1\}, 1\}$.

Příklady

Jaké prvky obsahují následující množiny?

1. $\bigcup_{i=1}^{10}\{j \in \mathbb{N} : j^2 \leq i\}$,
2. $\bigcup_{i=1}^{10}\{j \in \mathbb{N} : j^2 < i\}$,
3. $\bigcup_{i=1}^{10}\{\{j \in \mathbb{N} : j^2 \leq i\}\}$,
4. $\bigcup_{i=1}^{10}\{\{j \in \mathbb{N} : j^2 < i\}\}$,
5. $\{\bigcup_{i=1}^{10}\{j \in \mathbb{N} : j^2 \leq i\}\}$.

A co když sjednocení nahradíme průniky?

Příklady

Porovnejte následující dvojice množin:

1. $2^{A \setminus B}$ a $2^A \setminus 2^B$,
2. $2^{A \cup B}$ a $2^A \cup 2^B$,
3. $2^{A \cap B}$ a $2^A \cap 2^B$,
4. $\{X : X \subseteq \bigcup_i A_i\}$ a $\bigcup_i \{X : X \subseteq A_i\}$,
5. $(\bigcup_i A_i) \setminus B$ a $\bigcup_i (A_i \setminus B)$,
6. $(\bigcap_i A_i) \setminus B$ a $\bigcap_i (A_i \setminus B)$.

Porovnejte trojici množin $\{X : X \subseteq \mathbb{N}\}$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{X : X \subseteq \{1, \ldots, n\}\}$ a $\bigcup_{k=0}^{\infty} \binom{\mathbb{N}}{k}$.

Příklady

Nechť $A_1, A_2, \ldots, A_n$ a $B_1, B_2, \ldots, B_n$ jsou libovolné množiny. Jaký je vztah mezi množinami:

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \bigcap_{i=1}^{n} (A_i \cup B_i) \ , \\
M_2 &= (\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \cup (\bigcap_{i=1}^{n} B_i) \ , \\
M_3 &= \bigcap_{i=1}^{n} (\bigcap_{j=1}^{n} (A_i \cup B_j)) \ .
\end{aligned}
$$