

Matematická analýza 1

Příklady na cvičení

(ver. 2.34, 9. května 2024)

1 Limity posloupností

Příklad 1.1:

Rozhodněte, zda jsou následující posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ monotóní a pokud ano, určete typ monotonie (rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající, konstantní):

a) $a_n = \sin(n\pi)$

b) $a_n = 2n + (-1)^n$

c) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$

d) $a_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n+2}}$

Příklad 1.2:

Rozhodněte, zda mají následující posloupnosti limitu. Spočtěte ji nebo ukažte, že neexistuje.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$ [0]

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1}$ [0]

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}$ [0]

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ [0]

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1}$ [1]

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ [neex.]

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n!}$ [1]

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n}$ [0]

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n}$ [0]

j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{n}$ [0]

k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ [neex.]

l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(\sqrt{n})$ [$+\infty$]

m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}$ [0]

n) $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ [0]

Příklad 1.3:

Spočtěte limity:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+n+1}{n^3+1}$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+1}{n+1}$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+2n+1}{n^2+2n+3}$
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4-n^2+1}{n^4+n^3+n-2}$
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+n-3}{n^3-1}$
- f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3+6n}{n^3-7n+7}$
- g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5+3n-2}{n^5-3n+1}$
- h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{100}n}{n^2+1}$
- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(n+2)^{18}}{n^{18}+4n^9+5}$
- j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^4+3n^2+12}{12n^3+4n^2-n}$
- k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt[3]{n^2}}$ [$+\infty$]
- l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n-1}}$ (pro $n \geq 2$) [1]
- m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin(n!)}{n+1}$
- n) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{16-\frac{1}{n}}-2}{\sqrt{16-\frac{1}{n}}-4}$
- o) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n-3^n}{5^n+3^n}$ [1]
- p) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n+3^n+5^n}{2^{n+1}+3^{n+1}+5^{n+1}}$
- q) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n+8^n}{8^{n+1}}$
- r) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n+(-2)^n}{3^n}$
- s) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n+(-3)^n}{2^n}$

Příklad 1.4:

Spočtěte limity:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2^n}{n^3+2 \cdot 2^n}$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n+1}{2n^3-n} \cdot 2^{1+\cos\left(\frac{\pi n}{6}\right)}$ [0]

- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 7^n + n^3 5^n}{-3n 7^n + \sqrt{n} 6^n}$
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 2n + n \sin(2n)}{n \cos(3n) + (2n + \sin(4n))^2}$
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{\sqrt{n^4 + 1}}$ [1]
- f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + \sqrt{n}}}{\sqrt{n + 1}}$
- g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n^{n-1} + 3^n}$
- h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n^{n+1} - 3^n}$
- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \left(\frac{1}{4n} - \frac{4}{n} \right)$ [0]
- j) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{n} \right)$ [neex.]

Příklad 1.5:

Spočtěte limity:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right)$
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$
- f) $\lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 1})$
- g) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{\frac{1}{n} + 1} - 1 \right)$
- h) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$
- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{\sqrt{n}}$ [1]
- j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}$ [0]
- k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$ [0]

Příklad 1.6:

Spočtěte limity:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1}$ [1]

- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2n^2 + 11}$ [1]
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + 2^n}$ [2]
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$ pro a, b, c nezáporná reálná $[\max(a, b, c)]$
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}$ $[+\infty]$
- f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}$
- g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n - 2^n}$
- h) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n^2} + \sqrt[n]{2^n}) \sqrt[n]{n^2 + 2^n}$
- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n + 2} \cdot 2^n - \sqrt{3^n + 2^n}}$
- j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\binom{2n+1}{n+2} + \binom{3n+1}{n+3}}$
- k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{4^n + 3^n \sin(2^n)}{5^n + 4^n \cos(3^n)}}$
- l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{\pi n}{2} + \pi\right) \cdot n$
- m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \sqrt[3]{n^3 + n^2} - \sqrt{n^2 + n}}{\sqrt{n} - \sqrt[4]{n}}$
- n) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + \sin^2(n)} - \sqrt{n - \cos^2(n)}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}$
- o) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^5 + 2} - \sqrt[3]{n^2 + 1}}{\sqrt[3]{n^4 + 2} - \sqrt{n^3 + 1}}$
- p) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2})$
- q) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 + \frac{1}{n})^{100} - (4 - \frac{3}{n})^{50}}{(8 - \frac{1}{n})^{34} - (4 + \frac{1}{n})^{51}}$

Příklad 1.7:

Spočtěte limity:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n^{n-1} + 3^n} \cos(2n\pi)$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n^{n-1} - 3^n} \cos(2n\pi)$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \left(\frac{1}{8} - \frac{2}{n}\right)$ [neex.]
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \left(\frac{1}{4n} - \frac{2}{n}\right)$ [0]
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n^{1 + \sin(n)}}{(2n+1)^3}$ [1/8]
- f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^{5n}$ $[e^{10}]$

- g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{3n}$ [e^3]
- h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + (-1)^n \sin(3n)}{n^3 - 3n^2}$
- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n^4}{2n^3 - 5n^2}$
- j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 4^n}{2^{n-1} + 4^{-n}}$
- k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + (-1)^n \sin(4^n)}{3n^4 - 4n^3}$
- l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n^3}{5n^2 - 11n}$

Příklad 1.8:

V závislosti na parametrech $k, l \in \mathbb{N}$ určete limity

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^k - n^k}{n^{k-1}}$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^k - (n-1)^k}{(n+1)^l - (n-1)^l}$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k - (n-1)^l}{n^k + n^l}$
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^k + (-n)^l}{(n-1)^k - n^l}$

Příklad 1.9:

Spočtěte limity:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, kde $a_1 = 0, a_{n+1} = \frac{a_n}{4} + 1$ pro $n = 1, 2, \dots$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, kde $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n^2}{4} + 1$ pro $n = 1, 2, \dots$ [2]
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, kde $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right)$ pro $n = 1, 2, \dots$
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, kde $a_1 = \sqrt{c}, a_{n+1} = \sqrt{a_n + c}$ pro $n = 1, 2, \dots$ a $c \in \mathbb{R}^+ \left[\sqrt{\frac{1}{4} + c} \right]$

Příklad 1.10:

Určete hromadné body posloupnosti definované následovně:

$$a_1 = 1, \text{ pro } n \geq 2 \text{ je } a_n = \min\{d \in \mathbb{N} : d \geq 2 \wedge d \setminus n\}.$$

Příklad 1.11:

Spočtěte součet geometrické řady $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ (v závislosti na parametru $q \in \mathbb{R}$).

Příklad 1.12:

Ukažte, že harmonická řada diverguje, tj. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$.

2 Limity funkcí

Příklad 2.1:

Spočtěte limity:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(x)$ [neex.]
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(x^2)$ [1]
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ [neex.]
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ [1]
- e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ [1]
- f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x}$ [1]
- g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ [$\frac{1}{2}$]
- h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$ [1]

Příklad 2.2:

Spočtěte limity:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5 + 7x + 1}{3x^5 - 4x^3 - x^2}$ [$\frac{2}{3}$]
- b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^2}{x^3 - 12x + 16}$ [$\frac{3}{2}$]
- c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}$ [$-\frac{1}{2}$]
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}$ [6]
- e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ [$\frac{1}{2}$]
- f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$ [$\frac{3}{2}$]
- g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$ [$\frac{1}{2}$]

Příklad 2.3:

Spočtěte limity:

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$ [0]
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$ [$\frac{2}{3}$]
- c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$

- d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$
- e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$ [$\frac{1}{3}$]
- f) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}$
- g) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$ [$\frac{4}{3}$]
- h) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}$ [$-\frac{1}{16}$]

Příklad 2.4:

Spočtěte limity ($m, n \in \mathbb{N}$):

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+x^2+\dots+x^n-n}{x-1}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - \sqrt[n]{1+bx}}{x}$
- e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$ [$\frac{m}{n}$]
- f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}$ [$\frac{n}{m}$]

Příklad 2.5:

Spočtěte limity:

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ [1]
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x}$ [1]
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\frac{1}{x}}$ [e]

Příklad 2.6:

Spočtěte limity:

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}) - 5 \sin(x)$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \tan(x^2))^{\frac{1}{x}}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\left(\frac{1}{x} \right)^2 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{5}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}}$
- d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 6x + 9) \left(\cos\left(\frac{1}{x-3}\right) + 1 \right)}{2x^2 - 2x - 12}$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 2x - 3) \left(\cos\left(\frac{1}{x-3}\right) + 1 \right)}{2x^2 - 2x - 12}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(8(x-1) - 2x^2) \left(\cos\left(\frac{1}{x-2}\right) + 1 \right)}{x^2 + x - 6}$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin((2x)^{8/3})}{x^{8/3}}$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow \infty} e^{2x(2+\sin x)} - e^{x(2+\sin x)}$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} (\lfloor x \rfloor - x)$$

$$\text{j) } \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1}{\lfloor x \rfloor}$$

$$\text{k) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}$$

$$\text{l) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) \quad [0]$$

Příklad 2.7:

Pro následující funkce určete, v kterých bodech jsou definované a v kterých jsou spojité:

$$\text{a) } \frac{1}{x}$$

$$\text{b) } \sin x$$

$$\text{c) } \sin \frac{1}{x}$$

$$\text{d) } \frac{1}{\sin x}$$

$$\text{e) } \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x}$$

3 Derivace

Příklad 3.1:

Spočtěte derivace:

a) $(2x^2 + 3x - 1)'$

b) $\left(\frac{x^2-1}{x-2}\right)'$

c) $(e^{2x} + x^2e^{-2x})'$

d) $(\ln(x^2 + 1))'$

e) $((\sin x + \cos x)^2)'$

f) $(\sin^2 x + \cos^2 x)'$ [0]

g) $(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2})'$

h) $\left(\frac{\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt[4]{x^3-1}}\right)'$

i) $(x^x)'$ [$e^{x \ln x}(1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x)$]

j) $(x^{\ln x})'$ [$2x^{\ln x-1} \ln x$]

k) $((\ln x)^x)'$ [$(\ln x)^x(\ln \ln x) + (\ln x)^{x-1}$]

l) $(\arcsin x)'$

m) $(\arccos x)'$

n) $(\arctan \frac{1}{x})'$ [$-\frac{1}{1+x^2}$]

o) $(\cos^3(2x))'$ [$-6 \sin(2x) \cos^2(2x)$]

p) $(\sin \sqrt{x-1})'$ [$\frac{\cos \sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}$]

q) $\left(x^2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{2x}}\right)'$

r) $\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\right)'$ [$\frac{-2x}{(1+x^2)^2 \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}}$]

s) $(x^2 \cdot 2^x)'$ [$x2^{x+1} + x^2 2^x \ln 2$]

t) $(x^{x^x})'$ [$x^{x^x+x-1}(x \ln^2 x + x \ln x + 1)$]

Příklad 3.2:

Určete definiční obory funkcí a spočtěte jejich derivace (všude, kde existují):

a) $\cos^3(2x)$

b) $\sin \sqrt{x+2}$

c) $\sqrt{\frac{x-1}{x^2+1}}$ $\left[\frac{-x^2+2x+1}{2(x^2+1)^2 \sqrt{\frac{x-1}{x^2+1}}}, D_f = [1, \infty) \right]$

d) $x^2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

e) $\ln \left(\frac{x^2-1}{x+1} \right)$

f) $\ln(\ln(\sin x))$ $\left[\frac{\cotan x}{\ln \sin x}, D_f = \emptyset \right]$

g) $\ln(\sin(e^x))$ $[e^x \cotan e^x, D_f = (-\infty, \ln(\pi)) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (\ln(2k\pi), \ln((2k+1)\pi))]$

h) $x \cos x + \sin(2x^2)$ $[\cos x - x \sin x + 4x \cos(2x^2), D_f = \mathbb{R}\mathbb{R}]$

i) $2^{x-1} + 3^{x+1}$

j) $x e^{-x^2}$ $[(1-2x^2)e^{-x^2}, D_f = \mathbb{R}]$

Příklad 3.3:

Určete, v kterých bodech existuje derivace funkce

$$f(x) = \begin{cases} x^2 |\cos \frac{\pi}{x}| & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

Příklad 3.4:

Pomocí l'Hospitalova pravidla spočtěte limity ($a > 0$)

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\tan x}}{2 \sin^2 x - 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2 \arctan x} \right)^x$

Příklad 3.5:

Spočtěte limity funkcí, nebo dokažte, že neexistují ($k \in \mathbb{Z}$)

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^3 + x + 1)}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sqrt{|\cos \frac{1}{x}|}$
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}{\ln(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})}$
- d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan x^{\tan 2x}$
- e) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{(x - \frac{\pi}{4})^2}$
- f) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{(x - \frac{\pi}{4})^3}$
- g) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + x2^x}{1 + x3^x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$
- h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1 + 2^x) \cdot \ln(1 + \frac{3}{x})$
- i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin(\sin x))}{\cos(\frac{\pi}{2} \cos x)} \cdot x^k$
- j) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x-1})$
- k) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \cdot \tan(\frac{\pi}{4} - x)$
- l) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ [0]
- m) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{1 - \cos x}$ [1]

Příklad 3.6:

Rozviňte Taylorův polynom v bodě $x = 0$ (alespoň do druhého řádu).

- a) e^{-x}
- b) $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- c) $e^{2x - x^2}$
- d) e^{x^2}
- e) $\sin(3x)$
- f) $\frac{1}{1-x}$

Příklad 3.7:

Rozviňte Taylorův polynom funkce $\ln x$ v bodě $x = 1$.

Příklad 3.8:

Spočtěte (pomocí Taylorova rozvoje) limity

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$ [$\frac{1}{24}$]
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1}{\sin x - x}$ [-6]
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$ [- $\frac{1}{3}$]
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} \right)$ [$\frac{2}{3}$]
- e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \arctan x - x}{x(2e^x - e^{2x} - 1)}$ [$\frac{5}{6}$]
- f) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \left(\cos \frac{1}{x} - e^{-\frac{1}{2x^2}} \right)$ [- $\frac{1}{12}$]
- g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$ [- $\frac{1}{2}$]
- h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2} - \frac{x^2}{6}}{x^3}$ [$\frac{3}{2}$]

Příklad 3.9:

Díky znalosti rozvoje $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ rozviňte v nule

- a) $\frac{1}{1+x^3}$
- b) $\frac{1+x}{1-x^2}$
- c) $\frac{1}{1-2x+x^2}$

Příklad 3.10:

Vyšetřete průběh následujících funkcí

- a) $\frac{2x}{1-x^2}$
- b) $x\sqrt{1-x^2}$
- c) $\sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$
- d) $\sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$
- e) $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 + 1}$
- f) $x\sqrt[3]{(x+4)^2}$
- g) $\frac{x^3+8}{x^3+1}$
- h) $(x+1)^{2/3} + (x-1)^{2/3}$
- i) $\frac{|x+1|^{3/2}}{\sqrt{x}}$

j) $1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}$

k) $\sin x + \cos^2 x$

l) $|\sin x| + \cos 2x$

m) $\sin(\sin x)$

n) e^{4-x^2}

o) e^{-x^2+3x-7}

p) $\frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-2|}$

q) $\frac{x^2}{|x|+1}$

r) $|x|e^{4x}$

s) $|x|e^{-3x}$

t) $\arcsin(\cos^2 x)$

u) $\arctan \frac{x+1}{x-1}$

v) $\arcsin \frac{x^2-1}{x^2+1}$

w) $\arccos \frac{2x}{1+x^2}$

x) $\arccos \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Příklad 3.11:

Pro pevně danou hodnotu $o \in \mathbb{R}^+$ určete, kerý z obdélníků s obvodem o má maximální obsah.

Příklad 3.12:

Jaké rozměry má mít termoska ve tvaru válce s objemem 1 litr, aby měla nejmenší možný povrch.

Příklad 3.13:

Do rotačního kužele o poloměru podstavy R a výšce H vepište válec tak, aby jejich osy byly totožné. Jaký bude poloměr podstavy r a výška h , aby měl maximální objem.

Příklad 3.14:

Stojíte na břehu řeky o šířce 12 km a chcete se dostat do vesnice Limita na druhém břehu vzdálené 20 km proti proudu (změřeno přímo od místa naproti vaší pozici).

Jste schopni plout na lodi rychlostí 6 km/h (rychlost proudu zanedbávejte) a po břehu běžet rychlostí 10 km/h. Určete, v kterém místě přistát s lodí na protějším břehu (nejprve poplujete a pak poběžíte po břehu), abyste se do Limity dostali co nejdříve.

4 Integrály

Příklad 4.1:

Najděte primitivní funkce:

- a) $\int x^2 + 2x - 3 \, dx$ $[\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + c]$
b) $\int e^x - e^{-x} \, dx$ $[e^x + e^{-x} + c]$
c) $\int \sin x + \cos x \, dx$ $[-\cos x + \sin x + c]$
d) $\int (x + 5)^2 \, dx$ $[\frac{x^3}{3} + 5x^2 + 25x + c]$
e) $\int \frac{1+x}{\sqrt{x}} \, dx$ $[2\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c]$
f) $\int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx$ $[x - \arctan x + c]$
g) $\int \tan^2 x \, dx$ $[\tan x - x + c]$

Příklad 4.2:

Vhodnou substitucí najděte primitivní funkce:

- a) $\int x e^{-x^2} \, dx$ $[-\frac{1}{2}e^{-x^2} + c]$
b) $\int \tan x \, dx$ $[-\ln |\cos x| + c]$
c) $\int \sin^2 x \, dx$ $[\frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + c]$
d) $\int \cos^2 x \, dx$ $[\frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + c]$
e) $\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} \, dx$ $[\frac{2}{3} \arctan^{3/2} x + c]$
f) $\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} \, dx$ $[2 \arctan \sqrt{x} + c]$
g) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \, dx$ $[\arctan \sqrt{x^2-1} + c]$
h) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+9} \, dx$ $[\frac{1}{2} \ln |x^2 + 2x + 9| + c]$
i) $\int \sin^3 x \, dx$ $[-\frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + c]$

Příklad 4.3:

Pomocí metody per partes určete primitivní funkce:

- a) $\int x \sin x \, dx$ $[-x \cos x + \sin x + c]$
b) $\int x e^x \, dx$ $[(x-1)e^x + c]$

- c) $\int \ln x \, dx$ $[x \ln x - x + c]$
d) $\int x^2 \cos x \, dx$ $[x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c]$
e) $\int \sin^2 x \, dx$ $[-\frac{1}{2} \sin x \cos x - \frac{x}{2} + c]$
f) $\int \arcsin x \, dx$ $[x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c]$

Příklad 4.4:

V závislosti na parametrech $a, b, c \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ (kde $a \neq 0, b^2 - 4c < 0$), spočtěte primitivní funkce:

- a) $\int \frac{1}{ax+b} \, dx$ $[\frac{1}{a} \ln |ax + b| + c]$
b) $\int \frac{1}{(ax+b)^n} \, dx$ $[\frac{-1}{a(n-1)(ax+b)^{n-1}}]$
c) $\int \frac{1}{ax^2+c} \, dx$
d) $\int \frac{1}{x^2+bx+c} \, dx$ $[\frac{1}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}} \arctan \frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}} + c]$
e) $\int \frac{x}{x^2+bx+c} \, dx$ $[\frac{1}{2} \ln |x^2 + bx + c| - \frac{b}{2\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}} \arctan \frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}} + c]$

Příklad 4.5:

Najděte primitivní funkce:

- a) $\int \frac{1}{1-x^2} \, dx$ $[\frac{1}{2}(\ln |x + 1| - \ln |x - 1|) + c]$
b) $\int \frac{x-2}{(x-1)^2} \, dx$ $[\ln |x - 1| + \frac{1}{x-1} + c]$
c) $\int \frac{3}{x^2+2x+4} \, dx$ $[\sqrt{3} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{3}} + c]$
d) $\int \frac{x^3-4x-6}{x^3-5x^2+6x} \, dx$ $[x + 3 \ln |x - 2| + 3 \ln |x - 3| - \ln |x| + c]$
e) $\int \frac{x^{17}-5}{x^2-1} \, dx$ $[\frac{x^{16}}{16} + \dots + \frac{x^2}{2} + 3 \ln |x + 1| - 2 \ln |x - 1| + c]$
f) $\int \frac{1}{x^4-1} \, dx$ $[\frac{1}{4}(\ln |x - 1| - \ln |x + 1|) - \frac{1}{2} \arctan x + c]$
g) $\int \frac{x}{x^3-3x+2} \, dx$ $[-\frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{6}(\ln |x + 1| - \ln |x + 2|) + c]$
h) $\int \frac{x^4}{x^3-1} \, dx$ $[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \ln |x - 1| + \frac{1}{6} \ln |x^2 + x + 1| - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}) + c]$
i) $\int \frac{2x}{1-x^2} \, dx$
j) $\int \frac{x+1}{x^2+5x+6} \, dx$

$$\text{k) } \int \frac{x^2-2x-2}{x^2+x-2} dx$$

$$\text{l) } \int \frac{x+1}{x^2+2x-3} dx$$

Příklad 4.6:

Najděte primitivní funkce:

$$\text{a) } \int x \sin 2x dx \quad \left[-\frac{1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + c\right]$$

$$\text{b) } \int x \sin x^2 dx \quad \left[-\frac{1}{2} \cos x^2 + c\right]$$

$$\text{c) } \int x^2 \sin x dx \quad \left[-x^2 \cos x + x \sin x + \cos x + c\right]$$

$$\text{d) } \int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx \quad \left[\frac{2}{3}(1+\ln x)^{3/2} - 2(1+\ln x)^{1/2} + c\right]$$

$$\text{e) } \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx \quad \left[\frac{1}{2 \cos 2x} + c\right]$$

$$\text{f) } \int \sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2} dx$$

$$\text{g) } \int \frac{(1-x)^3}{x} dx$$

$$\text{h) } \int \frac{x+1}{x-1} dx$$

$$\text{i) } \int x e^x dx$$

$$\text{j) } \int x e^{x^2} dx$$

$$\text{k) } \int x^2 e^x dx$$

Příklad 4.7:

Najděte primitivní funkce:

$$\text{a) } \int \frac{1}{\sin x} dx \quad \left[\ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| \right]$$

$$\text{b) } \int \frac{1}{\cos x} dx$$

$$\text{c) } \int \cotan x dx$$

$$\text{d) } \int \cos^2 x dx \quad \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c\right]$$

$$\text{e) } \int x^2 \cos x dx \quad \left[x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c\right]$$

$$\text{f) } \int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$$

$$\text{g) } \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx$$

$$\text{h) } \int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$$

- i) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx$
- j) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx$
- k) $\int x \arctan x dx$
- l) $\int \arctan x dx$ $[x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c]$
- m) $\int \arccos x dx$ $[x \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + c]$
- n) $\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx$
- o) $\int \sin(\ln x) dx$
- p) $\int x^n \ln x dx$, kde $n \neq -1$
- q) $\int e^{ax} \sin bx dx$ $[\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \sin bx - b \cos bx) + c]$
- r) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$ $[\ln(e^x + e^{-x}) + c]$
- s) $\int \ln^2 x dx$
- t) $\int \frac{1}{e^{2x} - 2e^x - 3} dx$
- u) $\int \frac{\cos x}{\cos^2 x - \sin x + 11} dx$
- v) $\int \frac{\sin x}{\sin^2 x + \cos x + 5} dx$
- w) $\int \sin x \cos x \ln(\sin x \cos x) dx$
- x) $\int \sqrt{1 - x^2} dx$ $[\frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2}) + c, \text{ subst. } x = \sin t]$

Příklad 4.8:

Najděte primitivní funkce:

- a) $\int 8e^x + 16e^{8x} - \frac{3}{x} dx$
- b) $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}} dx$
- c) $\int \frac{x^2}{e^x} dx$
- d) $\int e^x \sin x dx$
- e) $\int \frac{x^2}{\cos x^3} dx$
- f) $\int \sin^n x dx$
- g) $\int \cos^n x dx$

- h) $\int e^x x^n dx$
- i) $\int \sqrt{x} \ln x dx$
- j) $\int \frac{\ln(x-1)}{(x-2)^2} dx$
- k) $\int \frac{x}{x^3-1} dx$
- l) $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$
- m) $\int \frac{1}{e^{2x}-3e^x-4} dx$
- n) $\int \frac{1}{1+e^{x/6}+e^{x/3}+e^{x/2}} dx$
- o) $\int \frac{1}{x(\ln^2 x - 5 \ln x + 5)} dx$
- p) $\int \frac{1}{2-\cos x} dx$ $[\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3} \tan(x/2)) + c]$
- q) $\int \frac{e^{2x}+e^x}{e^{2x}+e^x-2} dx$ $[\frac{1}{3}(\ln(e^x + 2) + 2 \ln |e^x - 1|) + c]$
- r) $\int \sqrt{x} \ln(\sqrt{x}) dx$ $[\frac{1}{9}x^{3/2}(3 \ln x - 2) + c]$
- s) $\int \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ $[\sqrt{x}(\ln x - 2) + c]$
- t) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$ $[\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c]$
- u) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} dx$ $[x + 2\sqrt{x} + c]$
- v) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx$ $[x - 2\sqrt{x} + 2 \ln(\sqrt{x} + 1) + c]$

Příklad 4.9:

Spočtěte určité integrály:

- a) $\int_{-1}^2 |x| dx$ $[5/2]$
- b) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{3+\sin^2 x} dx$ $[0]$
- c) $\int_0^a x \ln x dx$ $[\frac{a^2}{4}(2 \ln a - 1)]$
- d) $\int_{1/e}^e |\ln x| dx$ $[2 - \frac{2}{e}]$
- e) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2} dx$ $[\frac{1}{2}]$
- f) $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x dx$ $[\frac{1}{2}]$
- g) $\int_1^e x^3 \ln x dx$ $[\frac{1}{16}(1 + 3e^4)]$

$$\text{h) } \int_0^2 2^x dx \quad \left[\frac{3}{\ln 2} \right]$$

$$\text{i) } \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx \quad [\text{neexistuje}]$$

Příklad 4.10:

Spočtěte obsah plochy mezi grafy funkcí

$$\text{a) } f(x) = x^2 - 2x + 1 \text{ a } g(x) = x^3 - x^2 - x + 1 \text{ (s průsečíky v } 0 \text{ a } 1) \quad \left[\frac{1}{12} \right]$$

$$\text{b) } f(x) = 3 - |x| \text{ a } g(x) = \frac{5}{9-x^2} \quad \left[8 - \frac{5}{3} \ln 5 \right]$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{x^2}{2} \text{ a } g(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \right]$$

Příklad 4.11:

Spočtěte plochu ohraničenou parabolou $y = x^2$ a přímkou ve výšce h nad vrcholem paraboly. $\left[\frac{4}{3} h \sqrt{h} \right]$

Příklad 4.12:

Vezměme funkci $\sin x$ na intervalu $(0, \pi)$ a její „převrácený obraz ukotvený v bodě $(0, 1)$ “ (funkce $1 - \sin x$). Spočtěte plochu útvaru který leží mezi těmito křivkami (taková čočka). $\left[2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} \right]$

Příklad 4.13:

Spočtěte délku křivky funkce na daném intervalu

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4} \text{ na } (2, 4) \quad \left[6 + \frac{1}{4} \ln 2 \right]$$

$$\text{b) } g(x) = \ln \frac{1}{\cos x} \text{ na } (0, \frac{\pi}{4}) \quad \left[\frac{1}{2} \ln(3 + 2\sqrt{2}) \right]$$

$$\text{c) } h(x) = x^2 \text{ na } (0, a), a > 0 \quad \left[\frac{2a\sqrt{1+4a^2} + \ln(2a + \sqrt{1+4a^2})}{4} \right]$$

$$\text{d) } ch(x) = \sqrt{x} \text{ na } (0, a^2), a > 0 \quad \left[\frac{2a\sqrt{1+4a^2} + \ln(2a + \sqrt{1+4a^2})}{4} \right]$$

Příklad 4.14:

Pomocí integrace spočtěte délku kružnice, plochu kruhu a objem a povrch koule o poloměru r

Příklad 4.15:

Spočtěte objem a povrch pláště tělesa vzniklého rotací paraboly $y = x^2$ o výšce h kolem osy y . $\left[V = \frac{\pi h^2}{2}, P = \frac{\pi}{6} ((4h + 1)^{3/2} - 1) \right]$

Příklad 4.16:

Spočtěte plochu útvaru s hranicí danou vztahem $|2x - 1| + |2x + 1| + 2|y| = 4$. $[3]$

Příklad 4.17:

Pomocí integrace spočtěte

- a) plochu útvaru ohraničeného parabolou $y^2 = x$ a přímkou $y = x - 2$
- b) plochu útvaru ohraničeného křivkou funkce $\ln x$, osou x a přímkou $x = e$
- c) objem tělesa vzniklého z útvaru b) rotací kolem osy x
- d) objem komolého rotačního kužele s výškou v a poloměry podstav r a R

$$[\text{a) } \frac{9}{2}, \text{ b) } 1, \text{ c) } e - 2, \text{ d) } \frac{\pi v}{3}(r^2 + rR + R^2)]$$

Příklad 4.18:

Spočítejte objem a povrch pláště tělesa vzniklého rotací paraboly $y = x^2$ o výšce h kolem osy y .

$$[V = \frac{\pi h^2}{2}, P = \frac{\pi}{6}((4h + 1)^{3/2} - 1)]$$

Příklad 4.19:

Spočítejte délku Asteriody zadaná parametricky

$$x(t) = a \sin^3(t), \quad y(t) = a \cos^3(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

kde a je reálný nenulový parametr.

$$[6|a|]$$

Příklad 4.20:

Pomocí výpočtu integrálu odhadněte co nejlépe harmonické číslo $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
 $[\ln(n + 1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1]$