

Matematická analýza 1 – Integrály

cvičení místo 1.5.2024

Primitivní funkce je operace inverzní k derivování (anglicky se nazývá výstižně antiderivative). Tedy F je primitivní funkcí k funkci f , pokud $F' = f$.

Pokud se zamyslíme na jednoznačnosti primitivní funkce, zjistíme, že různé funkce mohou mít stejnou derivaci. Takové dvě funkce se pak liší o funkci s nulovou derivací a to je konstantní funkce. Primitivní funkce tedy sice není jednoznačná, ale lze to vyřešit aditivní konstantou, která může nabývat libovolné reálné hodnoty.

Dále si uvědomíme, že derivace je lineární operátor (lin. zobrazení na prostoru funkcí, které však nemá triviální jádro) a díky tomu bude i operace nalezení primitivní funkce zachovávat linearitu. To znamená, že (jsou-li F, G prim. funkce k f, g a $\alpha \in \mathbb{R}$) primitivní funkce k funkci αf je αF a prim. funkcí k $f + g$ je $F + G$.

Připomeňme si některé základní derivace:

$$x^k \quad kx^{k-1} \quad \text{pro } k \neq 0$$

$$e^x \quad e^x$$

$$\sin x \quad \cos x$$

$$\cos x \quad -\sin x$$

$$\ln x \quad \frac{1}{x}$$

$$\tan x \quad \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\arctan x \quad \frac{1}{1+x^2}$$

Prohozením prvního a druhého sloupce tabulky získáme primitivní funkce k některým základním funkcím:

$$x^k \quad \frac{1}{k+1}x^{k+1} \quad \text{pro } k \neq -1$$

$$\frac{1}{x} \quad \ln |x|$$

$$e^x \quad e^x$$

$$\sin x \quad -\cos x$$

$$\cos x \quad \sin x$$

Některé řádky z první tabulky jsme do druhé nepřepisovaly, protože derivace některých funkcí nejsou úplně základní funkce. Naopak některé funkce nám v tabulce chybí a odpovídající primitivní funkce časem dopočteme.

Pro další zápis opustíme značení primitivních funkcí pomocí odpovídajících velkých písmen a začneme používat značku integrálu, tedy primitivní funkci k funkci $f(x)$ budeme zapisovat jako $\int f(x) dx$.

Příklad 1:

Spočtete

a) $\int \sin x + \cos x dx$

b) $\int e^x - e^{-x} dx$

c) $\int (x+1)^2 dx$

Řešení:

a) ze znalosti prim. funkcí k funkcím $\sin x$ a $\cos x$ a linearity dostaneme

$$\int \sin x + \cos x dx = -\cos x + \sin x + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

b) prim. funkci k e_x známe, při hledání prim. funkce k e^{-x} zkusíme spočítat derivaci $(e^{-x})' = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}$ což nám nakonec situaci zjednodušuje, takže

$$\int e^x - e^{-x} dx = e^x + e^{-x} + C$$

c) nejprve roznásobíme polynom a pak řešíme člen po členu

$$\int (x+1)^2 dx = \int x^2 + 2x + 1 dx = \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + x = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + C$$

Substitute ze vzorce pro derivaci složené funkce:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

dostáváme

Věta. Je-li $F(x)$ primitivní funkce k $f(x)$, pak $F(g(x))$ je primitivní funkce k $f(g(x)) \cdot g'(x)$.

Substituci si tu můžeme ilustrovat na předchozím příkladu $\int (x+1)^2 dx$. Vnitřní funkcí bude $g(x) = x+1$ s derivací $g'(x) = 1$ (což výrazně zjednodušuje použití věty o substituci), vnější funkce $f(x) = x^2$ s primitivní funkcí $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Pak $\int (x+1)^2 dx = \frac{(x+1)^3}{3} + C$ (pokud si $(x+1)^3$ roznásobíte, zjistíte, že tady $\frac{1}{3}$ je navíc, ta se ale schová do aditivní konstanty).

Příklad 2:

Spočtete

- a) $\int \frac{1}{1+x^2} dx$
- b) $\int \frac{x}{1+x^2} dx$
- c) $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$
- d) $\int \frac{1}{(1+x)^2} dx$

Řešení:

- a) zde se jedná o vzorec z tabulky derivací, tedy $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$
- b) použijeme substituci $t = 1+x^2$, $dt = 2x dx$, protože výraz v čitateli je skoro derivace této funkce (až na násobek)

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln |t| = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

- c) v případě podílu dvou polynomů nejprve zlomek částečně vydělíme (dělení polynomů se zbytkem tak, aby výsledný zlomek měl v čitateli pol. menšího stupně než ve jmenovateli)

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx = \int 1 - \frac{1}{1+x^2} dx = x - \arctan x + C$$

- d) substituce $t = x+1$, $dt = dx$

$$\int \frac{1}{(1+x)^2} dx = \int \frac{1}{t^2} dt = \frac{-1}{t} = \frac{-1}{1+x} + C$$

Příklad 3:

Spočtete

a) $\int \tan x \, dx$

b) $\int \tan^2 x \, dx$

Řešení:

a) upravíme

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \dots$$

a použijí substituci'

$$\begin{aligned} t &= \cos x \\ dt &= -\sin x \, dx \end{aligned}$$

a dosadíme (chybí nám znaménko mínus, tak celý integrál vynásobíme $(-1)^2$, jednu -1 vytkneme před integrál a druhou použijeme na substituci)

$$\dots = - \int \frac{1}{t} dt = -\log |t| = -\log |\cos x| = \log \left| \frac{1}{\cos x} \right| + C$$

b) $\int \tan^2 x \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \, dx = \tan x - x + C$
zde žádnou substituci dělat nemusíme, jen funkci upravíme a podíváme se do první tabulky s derivacemi

Integrace per partes

vyjdeme ze vzorce pro derivaci součinu funkcí

$$(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

dostaneme

$$f(x)g(x) = \int f(x)g'(x) \, dx + \int f'(x)g(x) \, dx$$

a po převedení

$$\int f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx$$

Příklad 4:

Spočtete

a) $\int x \sin x \, dx$

b) $\int \ln x \, dx$

c) $\int x e^x \, dx$

d) $\int x e^{x^2} \, dx$

e) $\int x^2 e^x \, dx$

Řešení:

- a) pokud nás napadne použít per partes (je to součin dvou funkcí, tak to by mohlo fungovat), máme dvě možnosti

$$\begin{array}{l} f = x \quad g' = \sin x \\ f' = 1 \quad g = -\cos x \end{array} \text{ nebo } \begin{array}{l} f = \sin x \quad g' = x \\ f' = \cos x \quad g = \frac{1}{2}x^2 \end{array}$$

na pravé straně vzorce pro per partes bysme měli integrovat součin funkcí z druhého řádku, takže je jasné, že první možnost je lepší volba

$$\int x \sin x \, dx = x(-\cos x) - \int 1(-\cos x) \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

- b) trikový příklad, který je ale důležitý pro doplnění tabulky s integrály základních funkcí, pro per partes si představíme logaritmus jako $1 \cdot \ln x$ a počítáme

$$\int \ln x \, dx = \left[\begin{array}{l} f = \ln x \quad g' = 1 \\ f' = \frac{1}{x} \quad g = x \end{array} \right] = x \ln x - \int \frac{1}{x} x \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C$$

- c) podobně jako v úloze a)

$$\int x e^x \, dx = \left[\begin{array}{l} f = x \quad g' = e^x \\ f' = 1 \quad g = e^x \end{array} \right] = x e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx = x e^x - e^x + C$$

- d) tentokrát nepoužijeme per partes ale substituci (integrujeme součin, ale jedna z funkcí je derivací části druhé)

$$\int x e^{x^2} \, dx = \left[\begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x \, dx \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int e^t \, dt = e^t = e^{x^2} + C$$

e) zpět k per partes

$$\int x^2 e^x dx = \left[\begin{array}{ll} f = x^2 & g' = e^x \\ f' = 2x & g = e^x \end{array} \right] = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = \dots$$

a použijeme per partes ještě jednou nebo dosadíme výsledek z úlohy c)

Bonus k naštvání. Kdyby chtěl někdo pokračovat dál a spočítat $\int x^2 e^{x^2} dx$, je zde zajímavý trik pro per partes

$$\int x^2 e^{x^2} dx = \int x \cdot (x e^{x^2}) dx = \left[\begin{array}{ll} f = x & g' = x e^{x^2} \\ f' = 1 & g = e^{x^2} \end{array} \right] = x e^{x^2} - \int e^{x^2} dx$$

tím jsme si ale nepomohli, neboť funkce e^{x^2} nemá analyticky vyjádřitelnou primitivní funkci, ale vidíme, že ani $x^2 e^{x^2}$ nemůže mít „slušnou“ primitivní funkci

cvičení místo 8.5.2024

Příklad 1:

Spočtete

a) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$

b) $\int \sin^3 x dx$

c) $\sin^2 x dx$

d) $\cos^2 x dx$

Řešení:

- a) podobně jako u primitivní funkce k $\frac{1}{\cos^2 x}$ z tabulku pro derivace víme, že to vyjde $\tan x$, zde uhadneme $\cotan x$ (a případně ověříme derivováním)

zapsat to můžeme také pomocí substituce (ale tu musíme uhadnout)

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \left[\begin{array}{l} t = \cotan x \\ dt = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \frac{-1}{\sin^2 x} dx \end{array} \right] = \int (-1) dt = -t = -\cotan x + C$$

b)

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x dx &= \left[\begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right] = - \int (-\sin x)(1 - \cos^2 x) dx = \\ &= - \int 1 - t^2 dt = - \left(t - \frac{t^3}{3} \right) = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C \end{aligned}$$

- c) nejprve použijeme úpravy

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ 1 &= \sin^2 x + \cos^2 x \\ \cos^2 x &= 1 - \sin^2 x \\ \cos 2x &= 1 - 2\sin^2 x \\ \sin^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \end{aligned}$$

potom

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) + C$$

se substitucí v posledním kroku $t = 2x$

ještě lze upravit

$$\frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) = \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x)$$

d) lze řešit podobně jako předchozí úloha, ale my si zde ukážeme jiný přístup

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \, dx &= \left[\begin{array}{ll} f = \cos x & g' = \cos x \\ f' = -\sin x & g = \sin x \end{array} \right] = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx = \\ &= \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx = \sin x \cos x + \int 1 \, dx - \int \cos^2 x \, dx = \\ &= \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x \, dx\end{aligned}$$

z toho

$$2 \int \cos^2 x \, dx = x + \sin x \cos x$$

a tedy

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

Příklad 2:

Spočtete

a) $\int \frac{1}{1-x^2} dx,$

b) $\int \frac{x-2}{(x-1)^2} dx,$

c) $\int \frac{3}{x^2+2x+4} dx.$

Řešení:

a) nejprve rozložíme zlomek na jednodušší části, tzv. parciální zlomky

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{1+x}$$

kde α, β dopočteme zpětným převedením na společného jmenovatele

$$\frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{1+x} = \frac{\alpha(1+x) + \beta(1-x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{(\alpha + \beta) + x(\alpha - \beta)}{1-x^2}$$

z toho dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= 1 \\ \alpha - \beta &= 0\end{aligned}$$

s řešením $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, takže

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \int \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x} \right) dx = \frac{1}{2} (\ln|x+1| - \ln|x-1|) + C$$

b) opět rozložíme na parciální zlomky

$$\frac{x-2}{(x-1)^2} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{(x-1)^2} = \frac{\alpha(x-1) + \beta}{(x-1)^2} = \frac{(\beta - \alpha) + \alpha x}{(x-1)^2}$$

a porovnáním s původním čitatelem dostáváme $\alpha = 1, \beta = -1$

$$\int \frac{x-2}{(x-1)^2} = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx = \ln|x-1| - \frac{-1}{x-1} + C$$

c) tady rozklad nelze provést, neboť jmenovatel je ireducibilní polynom nad $\mathbb{R}$ (nemá reálné kořeny)situace je podobná jako u funkce $\frac{1}{1+x^2}$, tak to zkusíme využít

nejprve upravíme jmenovatele

$$x^2 + 2x + 4 = x^2 + 2x + 1 + 3 = (x + 1)^2 + 3 = 3\left(\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right)$$

takže

$$\int \frac{3}{x^2 + 2x + 4} dx = \int \frac{3}{3\left(\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right)} dx = \dots$$

a substituce $t = \frac{x+1}{\sqrt{3}}$ ($dt = \frac{1}{\sqrt{3}} dx$) dává

$$\dots = \int \frac{1}{t^2 + 1} \sqrt{3} dt = \sqrt{3} \arctan t = \sqrt{3} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C$$

Příklad 3:

Rozložte zlomek $\frac{7x+2}{(x-1)(x+2)}$ na parciální zlomky.

Řešení: převod na soustavu lin. rovnic

$$\begin{aligned} \frac{7x+2}{(x-1)(x+2)} &= \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+2} \\ 7x+2 &= \alpha(x+2) + \beta(x-1) \\ 7x+2 &= (\alpha+\beta)x + (2\alpha-\beta) \end{aligned}$$

z toho

$$\begin{aligned} 7 &= \alpha + \beta \\ 2 &= 2\alpha - \beta \end{aligned}$$

s řešením

$$\begin{aligned} \alpha &= 3 \\ \beta &= 4 \end{aligned}$$

Řešení: jednoduchý trik

$$\frac{7x+2}{(x-1)(x+2)} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+2}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \left[\frac{7x+2}{(x-1)(x+2)} \right]_{\text{bez}(x-1), x=1} = \left[\frac{7x+2}{x+2} \right]_{x=1} = \frac{9}{3} = 3 \\ \beta &= \left[\frac{7x+2}{(x-1)(x+2)} \right]_{\text{bez}(x+2), x=-2} = \left[\frac{7x+2}{x-1} \right]_{x=-2} = \frac{-12}{-3} = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{7x+2}{(x-1)(x+2)} &= \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+2} \quad \backslash \cdot (x-1) \\ \frac{7x+2}{x+2} &= \alpha + \frac{\beta}{x+2}(x-1) \quad \backslash \text{set } x=1 \end{aligned}$$

Příklad 4:

Spočtete

a) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx,$

b) $\int \arctan x dx,$

c) $\int \ln^2 x dx,$

d) $\int \sqrt{1 - x^2} dx,$

e) $\int \frac{1}{\sin x} dx$ (bonusová úloha s různými přístupy k řešení).

Řešení:

a)

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \dots$$

substituce

$$t = e^x + e^{-x}$$

$$dt = e^x - e^{-x} dx$$

$$\dots = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| = \ln(e^x + e^{-x}) + C$$

b)

$$\int \arctan x dx = \dots$$

nejprve per partes

$$\begin{array}{ll} f = \arctan x & g' = 1 \\ f' = \frac{1}{1+x^2} & g = x \end{array}$$

$$\dots = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = \dots$$

a teď substituce

$$t = 1 + x^2$$

$$dt = 2x dx$$

$$\dots = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt =$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(t) = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

c) dvakrát per partes, přičemž využijeme znalost $\int \ln x \, dx$

d)

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \dots$$

začneme překvapivou substitucí

$$\begin{aligned} x &= \sin t \\ dx &= \cos t \, dt \end{aligned}$$

$$\dots = \int \cos t \sqrt{1-\sin^2 t} \, dt = \int \cos t \sqrt{\cos^2 t} \, dt = \int \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) = \dots$$

což ještě před zpětnou substitucí upravíme

$$\dots = \frac{1}{2} (t + \sin t \cos t) = \frac{1}{2} \left(t + \sin t \sqrt{1-\sin^2 t} \right) = \frac{1}{2} \left(\arcsin x + x \sqrt{1-x^2} \right) + C$$

e) mnohem zábavnější integrál

$$\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \dots$$

začneme jednoduchou substitucí

$$\begin{aligned} x &= 2t \\ dx &= 2 \, dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dots &= \int \frac{1}{\sin(2t)} \cdot 2 \, dt = \int \frac{1}{2 \sin t \cos t} \cdot 2 \, dt = \int \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin t \cos t} \, dt = \\ &= \int \frac{\sin^2 t}{\sin t \cos t} \, dt + \int \frac{\cos^2 t}{\sin t \cos t} \, dt = \dots \end{aligned}$$

a zase substitute, dokonce dvě

$$\begin{aligned} u &= \cos t \\ du &= -\sin t \, dt \\ v &= \sin t \\ dv &= \cos t \, dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dots &= - \int \frac{-\sin t}{\cos t} \, dt + \int \frac{\cos t}{\sin t} \, dt = - \int \frac{1}{u} \, du + \int \frac{1}{v} \, dv = \\ &= -\ln |u| + \ln |v| = \ln \left| \frac{v}{u} \right| = \ln \left| \frac{\sin t}{\cos t} \right| = \ln |\tan t| = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right| + C \end{aligned}$$

e') tato varianta je založena na velmi podivné substituci (a související úpravě)

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} \\
 dt &= \left(\frac{-\cos x}{\sin^2 x} + \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \right) dx = - \left(\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx \\
 \int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x}} dx = \int \frac{\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x}} dx = \\
 &= - \int \frac{1}{t} dt = - \ln |t| = - \ln \left(\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \ln \left(\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right)^{-1} + C
 \end{aligned}$$

v porovnání s předchozím výsledkem vypadá řešení jinak, ale to je jen jiný zápis téhož

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right)^{-1} &= \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin(x/2) \cos(x/2)}{1 + \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)} = \\
 &= \frac{2 \sin(x/2) \cos(x/2)}{\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2) + \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)} = \frac{2 \sin(x/2) \cos(x/2)}{2 \cos^2(x/2)} = \\
 &= \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = \tan(x/2)
 \end{aligned}$$

e'') Weierstrassova substituce

velmi silný nástroj, který funguje, když vše ostatní selže

$$t = \tan \left(\frac{x}{2} \right)$$

vyjádříme

$$\sin x = 2 \sin(x/2) \cos(x/2) = 2 \frac{\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}}{\frac{1}{\cos^2(x/2)}} = 2 \frac{\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}}{\frac{\cos^2(x/2) + \sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}} = 2 \frac{\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}}{1 + \frac{\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}} =$$

a

$$= 2 \frac{\tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

podobně vyjádříme

$$\cos x = \dots = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

a s využitím

$$dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2(x/2)} dx = \frac{1}{2/(1 + t^2)} dx$$

dostáváme konečně

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

nyní se vrátíme k původnímu příkladu

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right| + C$$

cvičení 15.5.2024

Příklad 1:

Spočtěte

a) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx$

b) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx$

c) $\int x \arctan x dx$

d) $\int x^3 \sin x dx$

e) $\int a^x dx$ pro $a > 0$

Řešení:

a)

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx &= \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} \cos x dx = \left[\begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right] = \int \frac{1-t^2}{t} dt = \\ &= \int \frac{1}{t} - t dt = \ln |t| - \frac{t^2}{2} = \ln |\sin x| - \frac{\sin^2 x}{2} + C \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx &= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \sin x dx = \left[\begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right] = \int \frac{-t^2}{1-t^2} dt = \\ &= \int \frac{1-t^2-1}{1-t^2} dt = \int 1 - \frac{1}{1-t^2} dt = t - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} dt = \\ &= t + \frac{1}{2} (\ln |1-t| - \ln |1+t|) = \cos x + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right) + C \\ \dots &= \cos x - \ln \tan \frac{x}{2} + C \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \int x \arctan x dx &= \left[\begin{array}{l} f = \arctan x \quad g' = x \\ f' = \frac{1}{1+x^2} \quad g = \frac{1}{2}x^2 \end{array} \right] = \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int 1 - \frac{1}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}(x - \arctan x) = \frac{1}{2}((1+x^2) \arctan x - x) + C \end{aligned}$$

Při integraci metodou per partes je někdy možné si výpočet zjednodušit díky faktu, že primitivní funkce není určena jednoznačně, ale můžeme si vhodně zvolit aditivní konstantu.

$$\begin{aligned}\int x \arctan x \, dx &= \left[\begin{array}{ll} f = \arctan x & g' = x \\ f' = \frac{1}{x^2+1} & g = \frac{x^2+1}{2} \end{array} \right] = \\ &= \frac{x^2+1}{2} \arctan x - \int \frac{x^2+1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1} \, dx = \\ &= \frac{x^2+1}{2} \arctan x - \frac{x}{2} + x + C\end{aligned}$$

d)

$$\int x^3 \sin x \, dx = \left[\begin{array}{ll} f = x^3 & g' = \sin x \\ f' = 3x^2 & g = -\cos x \end{array} \right] = -x^3 \cos x - \int 3x^2(-\cos x) \, dx = \dots$$

Pokračovali bysme dalším per partes (a pak ještě jednou). To je správný postup, ukážeme si zde, jak opakované použití per partes zapisovat bez nutnosti opakovaného určování f a g . Tabulku s derivací jedné funkce a prim. funkcí k druhému členu součinu prodloužíme, ideálně až do stavu, kdy je na derivované straně konstanta, resp. 0 v dalším kroku.

$$\int x^3 \sin x \, dx = \left[\begin{array}{ll} \text{derivace} & \text{prim. fce} \\ x^3 & \sin x \\ 3x^2 & -\cos x \\ 6x & -\sin x \\ 6 & \cos x \\ 0 & \sin x \end{array} \right] = \dots$$

Z tabulky rovnou můžeme sestavit výsledek jakou sumu součinu funkce ve sloupci derivace s funkcí ve sloupci prim. funkcí o řádek níže, přičemž jednotlivé členy bereme s alternujícími znaménky.

$$\dots = (+)x^3(-\cos x) - 3x^2(-\sin x) + 6x \cos x - 6 \sin x + C$$

e)

$$\int a^x \, dx = \int e^{x \ln a} \, dx = \left[\begin{array}{ll} t = x \ln a \\ dt = \ln a \, dx \end{array} \right] = \int e^t \frac{1}{\ln a} \, dt = \frac{e^t}{\ln a} = \frac{e^{x \ln a}}{\ln a} = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

LIATE je skratka pro heuristické pravidlo, pomocí kterého při per partes volíme, kterou z funkcí budeme derivovat.

L	logaritmické funkce	$\ln, \log, \dots$
I	inverzní trigonom. funkce	$\arctan, \arcsin, \dots$
A	algebraický výraz	$x, x^3, \sqrt{x}, \dots$
T	trigonometrické funkce	$\sin, \tan, \dots$
E	exponenciální funkce	$e^x, 2^x, \dots$

Možnou modifikací je prohození prvních dvou kategorií, tedy pravidla **ILATE**, ale derivování logaritmické funkce bývá praktičtější.

Příklad 2:

$$\begin{aligned}
 \int \ln x \arcsin x \, dx &= \left[\begin{array}{ll} f = \ln x & g' = \arcsin x \\ f' = \frac{1}{x} & g = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \end{array} \right] = \\
 &= (\ln x)(x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}) - \int \frac{1}{x}(x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}) \, dx \\
 &= (\ln x)(x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}) - \int \arcsin x \, dx - \int \frac{1}{x}\sqrt{1-x^2} \, dx = \\
 &= (\ln x)(x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}) - (x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}) \\
 &\quad - \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1} = \\
 &= (\ln x - 1)(x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}) - \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1} + c
 \end{aligned}$$

s použitím $\int \arcsin x \, dx = \sqrt{1-x^2} + x \arcsin x + c$ a

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x}\sqrt{1-x^2} \, dx &= \left[\begin{array}{ll} t = \sqrt{1-x^2} \\ dt = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \end{array} \right] \\
 &= - \int \frac{t^2}{1-t^2} = t + \frac{1}{2} \ln(t-1) - \frac{1}{2} \ln(t+1) = \\
 &= \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1} + c
 \end{aligned}$$

Nicméně, pravidlo LIATE není vždy platné.

Příklad 3:

$$\int x^3 e^{x^2} \, dx$$

Sice by x^3 mělo mít přednost pro výběr k derivování, ale pak bysme museli hledat prim. funkci k e^{x^2} , což neumíme. Na druhou stranu, funguje jiná volba.

$$\begin{aligned}
\int x^3 e^{x^2} dx &= \left[\begin{array}{ll} f = x^2 & g' = x e^{x^2} \\ f' = 2x & g = \frac{1}{2} e^{x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \int 2x \cdot \frac{1}{2} e^{x^2} dx = \\
&= \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} = \frac{1}{2} (x^2 - 1) e^{x^2} + C
\end{aligned}$$

Příklad 4:

Dvojitě per partes a rovnice

$$\begin{aligned}
I &= \int e^{-x} \sin x dx = \left[\begin{array}{ll} f = e^{-x} & g' = \sin x \\ f' = -e^{-x} & g = -\cos x \end{array} \right] = \\
&= -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x dx = \left[\begin{array}{ll} f = e^{-x} & g' = \cos x \\ f' = -e^{-x} & g = \sin x \end{array} \right] = \\
&= -e^{-x} \cos x - \left(e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \sin x dx \right) = \\
&= -e^{-x} (\sin x + \cos x) - \int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} (\sin x + \cos x) - I
\end{aligned}$$

Z toho

$$\begin{aligned}
2I &= -e^{-x} (\sin x + \cos x) \\
I &= -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x)
\end{aligned}$$