Matematická analýza 1 – Integrály

cvičení místo 1.5.2024

Primitivní funkce je operace inverzní k derivování (anglicky se nazývá výstižne antiderivative). Tedy F je primitivní funkcí k funkci f, pokud $F' = f$.

Pokud se zamyslíme na jednoznačností primitivní funkce, zjistíme, že různé funkce mohou mít stejnou derivaci. Takové dvě funkce se pak liší o funkci s nulovou derivací a to je konstantní funkce. Primitivní funkce tedy sice není jednoznačná, ale lze to vyřešit aditivní konstantou, která může nabývat libovolné reálné hodnoty.

Dále si uvědomíme, že derivace je lineární operátor (lin. zobrazení na prostoru funkcí, které však nemá triviální jádro) a díky tomu bude i operace nalezení primitivní funkce zachovávat linearitu.To znamená, že (jsou-li F, G prim. funkce k f, g a $\alpha \in \mathbb{R}$) primitivní fukce k funkci αf je αF a prim.. funkcí k $f + g$ je $F + G$.

Připomeňme si některé základní derivace:

x^k	kx^{k-1}	pro $k \neq 0$
e^x	e^x	
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	

Prohozením prvního a druhého sloupce tabulky získáme primitivní funkce k některým základním funkcím:

x^k	$\frac{1}{k+1}x^{k+1}$	pro $k \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	
e^x	e^x	
$\sin x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$\sin x$	

Některé řádky z první tabulky jsme do druhé nepřepisovaly, protože derivace některých funkcí nejsou úplně základní funkce. Naopak některé funkce nám v tabulce chybí a odpovídající primitivní funkce časem dopočteme.

Pro další zápis opustíme značení primitivních funkcí pomocí odpovídajících velkých písmen a začneme používat značku integrálu, tedy primitivní fukci k funkce $f(x)$ budeme zapisovat jako $\int f(x)\ dx$.

Příklad 1:
Spočtěte

a) $\int \sin x + \cos x\ dx$

b) $\int e^x - e^{-x}\ dx$

c) $\int (x+1)^2\ dx$

Řešení:

a) ze znalosti prim. funkcí k funkcím $\sin x$ a $\cos x$ a linearity dostaneme

$$\int \sin x + \cos x\ dx = -\cos x + \sin x + C\ (C \in \mathbb{R})$$

b) prim. funkci k e_x známe, při hledání prim. funkce k e^{-x} zkusíme spočítat derivaci $(e^{-x})' = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}$ což nám nakonec situaci zjednodušuje, takže

$$\int e^x - e^{-x}\ dx = e^x + e^{-x} + C$$

c) nejprve roznásobíme polynom a pak řešíme člen po členu

$$\int (x+1)^2\ dx = \int x^2 + 2x + 1\ dx = \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + x = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + C$$

Substituce ze vzorce pro derivaci složené funkce:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

dostáváme
Věta. Je-li $F(x)$ primitivni fukce k $f(x)$, pak $F(g(x))$ je primitivní funkce k $f(g(x)) \cdot g'(x)$.

Substituci si tu můžeme ilustrovat na předchozím příkladu $\int (x+1)^2 \ dx$. Vnitřní funkcí bude $g(x) = x + 1$ s derivací $g'(x) = 1$ (což výrazně zjednodušuje použití věty o substituci), vnější funkce $f(x) = x^2$ s primitivní funkcí $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Pak $\int (x+1)^2 \ dx = \frac{(x+1)^3}{3} + C$ (pokud si $(x+1)^3$ roznásobíte, zjistíte, že tady $\frac{1}{3}$ je navíc, ta se ale schová do aditivní konstanty).

Příklad 2:
Spočtěte

a) $\int \frac{1}{1+x^2} \ dx$

b) $\int \frac{x}{1+x^2} \ dx$

c) $\int \frac{x^2}{1+x^2} \ dx$

d) $\int \frac{1}{(1+x)^2} \ dx$

Řešení:

a) zde se jedná o vzorec z tabulky derivací, tedy $\int \frac{1}{1+x^2} \ dx = \arctan x$

b) použijeme substituci $t = 1 + x^2, dt = 2x \ dx$, protože výraz v čitateli je skoro derivace této funkce (až na násobek)

$$\int \frac{x}{1+x^2} \ dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \ dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} \ dt = \frac{1}{2} \ln|t| = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

c) v případě podílu dvou polynomů nejprve zlomek částečně vydělíme (dělení polynomů se zbytkem tak, aby výsledný zlomek měl v čitateli pol. menšího stupně než ve jmenovateli)

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} \ dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} \ dx = \int 1 - \frac{1}{1+x^2} \ dx = x - \arctan x + C$$

d) substituce $t = x + 1, dt = \ dx$

$$\int \frac{1}{(1+x)^2} \ dx = \int \frac{1}{t^2} \ dt = \frac{-1}{t} = \frac{-1}{1+x} + C$$

Příklad 3:
Spočtěte

a) $\int \tan x \ dx$

b) $\int \tan^2 x \ dx$

Řešení:

a) upravíme

$$\int \tan x \ dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \ dx = \dots$$

a použiji substituci'

$$\begin{aligned} t &= \cos x \\ dt &= -\sin x \ dx \end{aligned}$$

a dosadíme (chybí nám znaménko mínus, tak celý integrál vynásobíme $(-1)^2$, jednu -1 vytkneme před integrál a druhou použijeme na substituci)

$$\dots = -\int \frac{1}{t} dt = -\log|t| = -\log|\cos x| = \log|\frac{1}{\cos x}| + C$$

b) $\int \tan^2 x \ dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \ dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \ dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \ dx = \tan x - x + C$
zde žádnou substituci dělat nemusíme, jen funkci upravíme a podíváme se do první tabulky s derivacemi

Integrace per partes

vyjdeme ze vzorce pro derivaci součinu funkcí

$$(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

dostaneme

$$f(x)g(x) = \int f(x)g'(x) \ dx + \int f'(x)g(x) \ dx$$

a po převedení

$$\int f(x)g'(x) \ dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \ dx$$

Příklad 4:
Spočtěte

a) $\int x \sin x \; dx$

b) $\int \ln x \; dx$

c) $\int xe^x \; dx$

d) $\int xe^{x^2} \; dx$

e) $\int x^2 e^x \; dx$

Řešení:

a) pokud nás napadne použít per partes (je to součin dvou funkcí, tak to by mohlo fungovat), máme dvě možnosti

$$\begin{array}{ll} f = x & g' = \sin x \\ f' = 1 & g = -\cos x \end{array} \quad \text{nebo} \quad \begin{array}{ll} f = \sin x & g' = x \\ f' = \cos x & g = \frac{1}{2}x^2 \end{array}$$

na pravé straně vzorce pro per partes bysme měli integrovat součin funkcí z druhého řádku, takže je jasné, že první možnost je lepší volba

$$\int x \sin x \; dx = x(-\cos x) - \int 1(-\cos x) \; dx = -x\cos x + \int \cos x \; dx = -x\cos x + \sin x + C$$

b) trikový příklad, který je ale důležitý pro doplnění tabulky s integrály základních funkcí, pro per partes si představíme logaritmus jako $1 \cdot \ln x$ a počítáme

$$\int lnx \; dx = \left[\begin{array}{ll} f = \ln x & g' = 1 \\ f' = \frac{1}{x} & g = x \end{array} \right] = x \ln x - \int \frac{1}{x} x \; dx = x \ln x - \int 1 \; dx = x \ln x - x + C$$

c) podobně jako v úloze a)

$$\int xe^x \; dx = \left[\begin{array}{ll} f = x & g' = e^x \\ f' = 1 & g = e^x \end{array} \right] = xe^x - \int 1 \cdot e^x \; dx = xe^x - e^x + C$$

d) tentokrát nepoužijeme per partes ale substituci (integrujeme součin, ale jedna z funkcí je derivací části druhé)

$$\int xe^{x^2} \; dx = \left[\begin{array}{ccc} t & = & x^2 \\ dt & = & 2x \; dx \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int e^t \; dt = e^t = e^{x^2} + C$$

e) zpět k per partes

$$\int x^2e^x\ dx = \left[\begin{array}{ll} f = x^2 & g' = e^x \\ f' = 2x & g = e^x \end{array}\right] = x^2e^x - \int 2xe^x\ dx = \dots$$

a použijeme per partes ještě jednou nebo dosadíme výsledek z úlohy c)

Bonus k naštvání. Kdyby chtěl někdo pokračovat dál a spočítat $\int x^2e^{x^2}\ dx$, je zde zajímavý trik pro per partes

$$\int x^2e^{x^2}\ dx = \int x\cdot(xe^{x^2})\ dx = \left[\begin{array}{ll} f = x & g' = xe^{x^2} \\ f' = 1 & g = e^{x^2} \end{array}\right] = xe^{x^2} - \int e^{x^2}\ dx$$

tím jsme si ale nepomohli, neboť funkce e^{x^2} nemá analyticky vyjádřitelnou primitivní funkci, ale vidíme, že ani $x^2e^{x^2}$ nemůže mít „slušnou“ primitivní funkci

cvičení místo 8.5.2024

Příklad 1:
Spočtěte

a) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\ dx$

b) $\int \sin^3 x\ dx$

c) $\sin^2 x\ dx$

d) $\cos^2 x\ dx$

Řešení:

a) podobně jako u primitivní funkce k $\frac{1}{\cos^2 x}$ z tabulku pro derivace víme, že to vyjde $\tan x$, zde uhodneme cotan x (a případně ověříme derivováním)

zapsat to můžeme také pomocí substituce (ale tu musíme uhodnout)

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\ dx = \left[\begin{array}{ccc} t & = & \text{cotan } x \\ dt & = & \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}\ dx = \frac{-1}{\sin^2 x}\ dx \end{array} \right] = \int (-1)\ dt = -t = -\text{cotan } x + C$$

b)

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x\ dx &= \left[\begin{array}{ccc} t & = & \cos x \\ dt & = & -\sin x\ dx \end{array} \right] = -\int (-\sin x)(1-\cos^2 x)\ dx = \\ &= -\int 1 - t^2\ dt = -\left(t - \frac{t^3}{3}\right) = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C \end{aligned}$$

c) nejprve použijeme úpravy

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ 1 &= \sin^2 x + \cos^2 x \\ \cos^2 x &= 1 - \sin^2 x \\ \cos 2x &= 1 - 2\sin^2 x \\ \sin^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \end{aligned}$$

potom

$$\int \sin^2 x\ dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + C$$

se substitucí v posledním kroku $t = 2x$

ještě lze upravit

$$\frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$$

d) lze řešit podobně jako předchozí úloha, ale my si zde ukážeme jiný přístup

$$\int \cos^2 x \; dx = \left[\begin{array}{ll} f = \cos x & g' = \cos x \\ f' = -\sin x & g = \sin x \end{array} \right] = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \; dx =$$

$$= \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \; dx = \sin x \cos x + \int 1 \; dx - \int \cos^2 x \; dx =$$

$$= \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x \; dx$$

z toho

$$2 \int \cos^2 x \; dx = x + \sin x \cos x$$

a tedy

$$\int \cos^2 x \; dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

Příklad 2:
Spočtěte

a) $\int \frac{1}{1-x^2}\, dx$,

b) $\int \frac{x-2}{(x-1)^2}\, dx$,

c) $\int \frac{3}{x^2+2x+4}\, dx$.

Řešení:

a) nejprve rozložíme zlomek na jednodušší části, tzv. parciální zlomky

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{1+x}$$

kde α, β dopočteme zpětným převedením na společného jmenovatele

$$\frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{1+x} = \frac{\alpha(1+x)+\beta(1-x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{(\alpha+\beta)+x(\alpha-\beta)}{1-x^2}$$

z toho dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &= 1 \\ \alpha-\beta &= 0 \end{aligned}$$

s řešením $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, takže

$$\int \frac{1}{1-x^2}\, dx = \int \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x} \right) dx = \frac{1}{2}(\ln|x+1| - \ln|x-1|) + C$$

b) opět rozložíme na parciální zlomky

$$\frac{x-2}{(x-1)^2} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{(x-1)^2} = \frac{\alpha(x-1)+\beta}{(x-1)^2} = \frac{(\beta-\alpha)+\alpha x}{(x-1)^2}$$

a porovnáním s původním čitatelem dostáváme $\alpha = 1$, $\beta = -1$

$$\int \frac{x-2}{(x-1)^2} = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx = \ln|x-1| - \frac{-1}{x-1} + C$$

c) tady rozklad nelze provést, neboť jmenovatel je ireducibilní polynom nad $\mathbb{R}$ (nemá reálné kořeny)

situace je podobná jako u funkce $\frac{1}{1+x^2}$, tak to zkusíme využít nejprve upravíme jmenovatele

$$x^2 + 2x + 4 = x^2 + 2x + 1 + 3 = (x+1)^2 + 3 = 3((\frac{x+1}{\sqrt{3}})^2 + 1)$$

takže

$$\int \frac{3}{x^2+2x+4}\, dx = \int \frac{3}{3((\frac{x+1}{\sqrt{3}})^2+1)}\, dx = \dots$$

a substituce $t = \frac{x+1}{\sqrt{3}}$ ($dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\, dx$) dává

$$\dots = \int \frac{1}{t^2+1}\sqrt{3}\, dt = \sqrt{3}\arctan t = \sqrt{3}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C$$

Příklad 3:
Rozložte zlomek $\frac{7x+2}{(x-1)(x+2)}$ na parciální zlomky.

Řešení: převod na soustavu lin. rovnic

$$\begin{aligned} \frac{7x+2}{(x-1)(x+2)} &= \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+2} \\ 7x+2 &= \alpha(x+2) + \beta(x-1) \\ 7x+2 &= (\alpha+\beta)x + (2\alpha - \beta) \end{aligned}$$

z toho

$$\begin{aligned} 7 &= \alpha + \beta \\ 2 &= 2\alpha - \beta \end{aligned}$$

s řešením

$$\begin{aligned} \alpha &= 3 \\ \beta &= 4 \end{aligned}$$

Řešení: jednoduchý trik

$$\frac{7x+2}{(x-1)(x+2)} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+2}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \left[\frac{7x+2}{(x-1)(x+2)}\right]_{bez(x-1),x=1} = \left[\frac{7x+2}{x+2}\right]_{x=1} = \frac{9}{3} = 3 \\ \beta &= \left[\frac{7x+2}{(x-1)(x+2)}\right]_{bez(x+2),x=-2} = \left[\frac{7x+2}{x-1}\right]_{x=-2} = \frac{-12}{-3} = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{7x+2}{(x-1)(x+2)} &= \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+2} && \backslash \cdot (x-1) \\ \frac{7x+2}{x+2} &= \alpha + \frac{\beta}{x+2}(x-1) && \backslash\text{set } x = 1 \end{aligned}$$

Příklad 4:
Spočtěte

a) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\ dx$,

b) $\int \arctan x\ dx$,

c) $\int \ln^2 x\ dx$,

d) $\int \sqrt{1-x^2}\ dx$,

e) $\int \frac{1}{\sin x}\ dx$ (bonusová úloha s různými přístupy k řešení).

Řešení:

a)

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\ dx = \dots$$

substituce

$$\begin{aligned} t &= e^x + e^{-x} \\ dt &= e^x - e^{-x}\ dx \end{aligned}$$

$$\dots = \int \frac{1}{t}\ dt = \ln|t| = \ln(e^x + e^{-x}) + C$$

b)

$$\int \arctan x\ dx = \dots$$

nejprve per partes

$$\begin{aligned} f &= \arctan x & \qquad g' &= 1 \\ f' &= \tfrac{1}{1+x^2} & \qquad g &= x \end{aligned}$$

$$\dots = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\ dx = \dots$$

a teď substituce

$$\begin{aligned} t &= 1 + x^2 \\ dt &= 2x\ dx \end{aligned}$$

$$\dots = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2}\ dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t}\ dt =$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(t) = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$$

c) dvakrát per partes, přičemž využijeme znalost $\int \ln x \; dx$

d)

$$\int \sqrt{1-x^2} \; dx = \dots$$

začneme překvapivou substitucí

$$\begin{aligned} x &= \sin t \\ dx &= \cos t \; dt \end{aligned}$$

$$\dots = \int \cos t \sqrt{1-\sin^2 t} \, dt = \int \cos t \sqrt{\cos^2 t} \, dt = \int \cos^2 t \; dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) = \dots$$

což ještě před zpětnou substitucí upravíme

$$\dots = \frac{1}{2}\left(t + \sin t \cos t\right) = \frac{1}{2}\left(t + \sin t \sqrt{1-\sin^2 t}\right) = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C$$

e) mnohem zábavbější integrál

$$\int \frac{1}{\sin x} \; dx = \dots$$

začneme jednoduchou substitucí

$$\begin{aligned} x &= 2t \\ dx &= 2 \; dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dots = \int \frac{1}{\sin(2t)} \cdot 2 \; dt = \int \frac{1}{2 \sin t \cos t} \cdot 2 \; dt = \int \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin t \cos t} \; dt = \\ = \int \frac{\sin^2 t}{\sin t \cos t} \; dt + \int \frac{\cos^2 t}{\sin t \cos t} \; dt = \dots \end{aligned}$$

a zase substituce, dokonce dvě

$$\begin{aligned} u &= \cos t \\ du &= -\sin t \; dt \\ v &= \sin t \\ dv &= \cos t \; dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dots = -\int \frac{-\sin t}{\cos t} \; dt + \int \frac{\cos t}{\sin t} \; dt = -\int \frac{1}{u} \; du + \int \frac{1}{v} \; dv = \\ = -\ln|u| + \ln|v| = \ln|\frac{v}{u}| = \ln|\frac{\sin t}{\cos t}| = \ln|\tan t| = \ln|\tan(\frac{x}{2})| + C \end{aligned}$$

e') tato varianta je založena na velmi podivné substituci (a související úpravě)

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} \\ dt &= \left(\frac{-\cos x}{\sin^2 x} + \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \right) \, dx = -\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) \, dx \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \int \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x}} \, dx = \int \frac{\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x}} \, dx =$$

$$= -\int \frac{1}{t} \, dt = -\ln|t| = -\ln\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \ln\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right)^{-1} + C$$

v porovnání s předchozím výsledkem vypadá řešení jinak, ale to je jen jiný zápis téhož

$$\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right)^{-1} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)}{1 + \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)} =$$

$$= \frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)}{\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2) + \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)} = \frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)}{2\cos^2(x/2)} =$$

$$= \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = \tan(x/2)$$

e") Weierstrassovva substituce

velmi silný nástroj, který funguje, když vše ostatní selže

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

vyjádříme

$$\sin x = 2\sin(x/2)\cos(x/2) = 2\frac{\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}}{\frac{1}{\cos^2(x/2)}} = 2\frac{\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}}{\frac{\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}} = 2\frac{\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}}{1 + \frac{\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}} =$$

a

$$= 2\frac{\tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

podobně vyjádříme

$$\cos x = \ldots = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

a s využitím

$$dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2(x/2)} \, dx = \frac{1}{2/(1 + t^2)} \, dx$$

dostáváme konečně

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\ dt$$

nyní se vrátíme k původnímu příkladu

$$\int \frac{1}{\sin x}\ dx = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2}\ dt = \int \frac{1}{t}\ dt = \ln|t| = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$