Lineární algebra 2 – rekurence s využitím vlastních čísel

Na příkladu rekurence, kterou jsme řešily při výpočtu determinantu matice si ukážeme, jak řešit lineární rekurence s využitím vlastních čísel.

$$
\begin{aligned}
det(A_n) &= det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= 3det\begin{pmatrix} 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{pmatrix} + (-2)det\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= 3det\begin{pmatrix} 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{pmatrix} + (-2)det\begin{pmatrix} 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= 3det(A_{n-1}) - 2det(A_{n-2})
\end{aligned}
$$

Nejprve načrtneme obecné řešení takovéhoto typu rekurence, kde další člen posloupnosti závisí na dvou předchozích (je jejich lineární kombinací, takže se jedná o lineární rekurenci druhého řádu).

Sestavíme matici X tak, aby

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}$$

Potom

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = X^2 \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{pmatrix} = \dots = X^{n-2} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

Pokud by matice X byla diagonalizovaltená, tedy $X = SDS^{-1}$, kde D má na diagonále vlastní čísla X, lze psát $X^k = SD^kS^{-1}$ a D^k je stále diagonální s k-tými mocninami vlastních čísel D na diagonále. (Pokud bysme chtěli, mohli bychom dopočítat i matici S, jejíž sloupce tvoří odpovídající vlastní vektory, a poté inverzní matici S^{-1}, ale není to nutné.)

Označíme-li vlastní čísla X jako λ_1, λ_2, pak z maticového násobení lze nahlédnout, že a_n bude nějakou lineární kombinací prvků z diagonály D_{n-2}, tedy lin. kombinací λ_1^{n-2} a λ_2^{n-2} (s koeficienty, které závisí na prvcích matic S a S^{-1}). Pro zjednodušení výsledného vzorce napíšeme a_n jako lin. kombinaci λ_1^n, λ_2^n a přebívající λ_i^2 schováme v koeficientu té lin. kombinace. Tím dostaneme vzorec

$$a_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \lambda_2^n$$

Zbývá dopočítat zmiňované koeficienty α_1, α_2. Místo toho, abychom je vyčíslovali od začátku výpočtu, dopočteme je nyní ze soustavy rovnic dané počátečními hodnotami a_1, a_2.

V našem konkrétním případě budeme řešit rekurenci $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ s počátečními podmínkami $a_1 = 3, a_2 = 7$.

Z dané rekurence je matice $X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ s charakteristickým polynomem $det(X - \lambda I) = (3-\lambda)(-\lambda)+2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2)$ s kořeny $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Z toho $a_n = \alpha_1 \cdot 1^n + \alpha_2 \cdot 2^n = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 2^n$.

Nyní dopočteme koeficienty ze soustavy

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 &= 3 \quad (= a_1) \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 &= 7 \quad (= a_2) \end{aligned}$$

Dostáváme $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 2$ a výsledný vzorec $a_n = 2^{n+1} - 1$.