Lineární algebra 2 – cvičení 10

Pozitivně definitní matice 25. 4. 2023

Příklad 1:
Rozhodněte, zda jsou následující matice pozitivně definitní. Ověřte přímo z definice, resp. pomocí vlastních čísel.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 2:
Pokud jsou následující matice poz. definitní, spočtěte Choleského rozklad.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 10 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Příklad 3:
Dokažte následující tvrzení:
Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou symetrické pozitivně definitní matice a $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Potom jsou i matice αA a $A + B$ také pozitivně definitní.

Příklad 4:
Dokažte následující tvrzení:
Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická pozitivně definitní matice, potom má kladnou diagonálu (tj. $\forall i = 1, \ldots, n$ je $a_{ii} > 0$). Ukažte, že opečná implikace neplatí.

Příklad 5:
Rozhodněte, zda je následující matice pozitivně definitní.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$