Lineární algebra 2 – cvičení 9
Jordanův normální tvar 18. 4. 2023

Příklad 1:
Převeďte matici na Jordanův normální tvar (rozklad $A = RJR^{-1}$):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení: matice má jedniné vlastní číslo $\lambda = 2$ s algebraickou násobností 4, vlastní vektory jsou nenulová řešení soustavy rovnic s maticí

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dimenze $Ker(A - \lambda I)$ je rovna 2, takže matice A má k vlastnímu číslu dva LNZ vlastní vektory, volíme např. $x_1 = (0, 0, 1, 0)^T$ a $x_2 = (1, 0, 0, 0)^T$

Pro sestavení regulární marice R potřebujeme ještě najít další 2 zobecněné vlastní vektory. Ty hledáme tak, že místo soustavy $(A - \lambda I)x = 0$ dosadíme za pravou stranu vlastní vektor (případně v dalším kroku pak zobecněný vlastní vektor), tedy řešíme soustavu s rozšířenou maticí (pro x_1)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

která nemá řečení (viz. druhý a třetí řádek). Z toho odvodíme, že tomuto vlastnímu vektoru bude odpovídat Jordanova buňka velikosti 1.

Pro druhý vlastní vektor x_2 tím pádem musíme dopočítat dva zobecněné vlastní vektory a druhá Jordanovu buňku bude mít velikost 3. Počítáme podobně jako v předchozím případě, pravou stranu zvolíme x_2

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

množina řešení soustavy je affiní podprostor dimenze 2, přesněji vektory ve tvaru $(p, 1, q, 0)^T$, my za x_3 zvolíme $p = q = -1$ a tak $x_3 = (-1, 1, -1, 0)^T$

dále vezmenme x_3 jako pravou stranu již mnohokrát řešené soustavy a pokračujeme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

s (pro další výpočet pěkným) řešením $x_4 = (0, 0, 0, -\frac{1}{2})^T$

Nyní můžeme sestavit matice J a R a poté dopočítat R^{-1}

$$\begin{aligned} J &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ R &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ R^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Příklad 2:
Převeďte matici na Jordanův normální tvar (rozklad $A = RJR^{-1}$):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení: Vlastní číslo $\lambda = 1$ s algebraickou násobností 5.

hodnost matice $A - \lambda I = A - I$ je rovna 3, takže $\dim(\mathrm{Ker}(A - I)) = 2$ a máme dva LNZ vlastní vektory

Kdybychom chtěli k vlastnímu vekoru x_1 dopočítat zobecněný vl. vektor x_2, znamenalo by to řešit rovnici

$$(A - \lambda I)x_2 = x_1$$

což lze nahlédnout (po úpravě) jako hledání řešení rovnice

$$(A - \lambda I)^2 x_2 = (A - \lambda I)x_1 = 0\ ,$$

tedy $x_2 \in \mathrm{Ker}((A - \lambda I)^2) \setminus \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$ atd. pro další vektory v řetízku zobecněných vlastních vektorů. Navíc lze snadno nahlédnout, že $\mathrm{Ker}((A - \lambda I)^k) \subseteq Ker((A - \lambda I)^{k+1})$.

Pro náš případ s $\lambda = 1$ spočteme

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a

$$(A - I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Je patrné, že $\dim(\mathrm{Ker}(A - I)^2) = 4$ a $\dim(\mathrm{Ker}(A - I)^3) = 5$, takže bude existovat jeden LNZ vektor v $\mathrm{Ker}(A - I)^3 \setminus \mathrm{Ker}(A - I)^2$, např. $x_3 = (0, 0, 0, 0, 1)^T$. Ten by měl splňovat $(A - I)x_3 = x_2$, tedy dopočteme $x_2 = (-1, 0, -1, 1, 0)^T$ a $x_1 = (A - I)x_2 = (0, 0, 1, 0, 0)^T$ (což je vlastní vektor matice A). Tím jsme vyřešili jednu J. buňku velikosti 3.

Druhá buňka bude mít velikost 2 a opět ji budeme počítat od konce řetízku, tedy zobecněnáho vl. vektoru y_2. Pro ten musí platit $y_2 \in \mathrm{Ker}(A-I)^2 \setminus \mathrm{Ker}(A-I)$ a je LNZ s x_2, volíme např. $y_2 = (0,1,0,0,0)^T$ a dopočteme $y_1 = (A-I)y_2 = (1,0,0,0,0)^T$ (opět vl. vektor A).

Nyní můžeme sestavit matice R a J a dopočítat inverzní matici R^{-1}

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(sloupce jsou po řadě y_1, y_2, x_1, x_2, x_3)

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$