Lineární algebra 2 – cvičení 8

Vlastní čísla matic podruhé 11. 4. 2023

Příklad 1:
Dokažte, že je-li $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ s vlastními čísly $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ a odpovídajícími vlastními vektory $x_1, \dots, x_n$, potom

1. A je regulární $\Leftrightarrow$ 0 není její vl. číslo
2. je-li A regulární, pak A^{-1} má vl. čísla $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$ (a vl. vektory $x_1, \dots, x_n$)
3. A^2 má vl. čísla $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ (a vl. vektory $x_1, \dots, x_n$)
4. αA má vl. čísla $\alpha\lambda_1, \dots, \alpha\lambda_n$ (a vl. vektory $x_1, \dots, x_n$)
5. $A + \alpha I$ má vl. čísla $\lambda_1 + \alpha, \dots, \lambda_n + \alpha$ (a vl. vektory $x_1, \dots, x_n$)
6. A^T má vl. čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (a o vl. vektorech nelze obecně nic říct)

Příklad 2:
Spočtěte (co nejefektivněji) zbývající vlastní číslo, pokud máte dáno

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 6 \end{array}$$

Příklad 3:
Nalezněte matici A takovou, že její vlastní čísla a vlastní vektory jsou

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = 3 & x_1 = (-3, 2, 1)^T \\ \lambda_2 = -2 & x_2 = (-2, 1, 0)^T \\ \lambda_3 = 1 & x_3 = (-6, 3, 1)^T \end{array}$$

Příklad 4:
Rozhodněte, zda je následující matice diagonalizovatelná a pokud ano, spočtěte matice S a D z rozkaldu $A = S \cdot D \cdot S^{-1}$. Zkuste si uvědomit, kdy nejdříve jste schopni odpovědět na první část otázky.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 5:
Rozhodněte, zda je následující matice diagonalizovatelná a pokud ano, spočtěte matice S a D z rozkaldu $A = S \cdot D \cdot S^{-1}$. V případě, že diagonalizovatelná není, nalezněte podobnou matici v Jordanově normálním tvaru.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$