Lineární algebra 2 – cvičení 6
Determinanty podruhé 27. a 28. 3. 2023

Příklad 1:
V závislosti na parametrech $n \in \mathbb{N}$, $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, spočtěte determinant (řádu $n \times n$)

$$\begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \dots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_2 + b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \dots & a_n + b_n \end{pmatrix}$$

Příklad 2:
V závislosti na parametrech $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}^n$, spočtěte determinant (řádu $2n \times 2n$)

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & \dots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & b & \dots & a & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$$

Příklad 3:
V závislosti na $n \in \mathbb{N}$ spočtěte determinant řádu $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Příklad 4:
V závislosti na $n \in \mathbb{N}$ spočtěte determinant řádu $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \\ 3 & \dots & n & 1 & 2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

Příklad 5:
Počet koster grafu pomocí determinantu.

Pro graf $G = (V, E)$ sestavíme matici $L_G \in \mathbb{R}^{V \times V}$ tak, že

$$[L_G]_{ij} = \begin{cases} deg(v_i) & \text{pro } i = j \\ -1 & \text{pro } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{pro } \{v_i, v_j\} \notin E \end{cases}$$

a L'_G vznikne z L_G vynecháním prvního řádku a sloupce. Potom

$$\kappa(G) = det(L'_G) \ .$$

Pomocí tohoto vzorce určete počet koster úplného grafu na n vrcholech.

Příklad 6:
Van der Mondův determinant

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$