Lineární algebra 2 – cvičení 1
Skalární součin, norma a metrika 20. a 21. 2. 2023

Příklad 1:
Je následující zobrazení ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ skalární součin?

a) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

b) $\langle x, y\rangle = x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3$

c) $\langle x, y\rangle = (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3)$

d) $\langle x, y\rangle = (x_1 + y_1)(x_2 + y_2)(x_3 + y_3)$

e) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$

Příklad 2:
Rovnoběžníkové pravidlo. Pro normu indukovanou skalárním součinem platí $||x-y||^2 + ||x+y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$. (Jen pro zajímavost, nebylo dokazováno i když důkaz je jednoduchý z vlastností skalárního součinu)

Příklad 3:
Ověřte, že $||x|| = |x_1 - 2x_2| + |3x_1 - 4x_2| + |5x_1 - 6x_2|$ je normou na prostoru $\mathbb{R}^2$.

Příklad 4:
Pro normy v prostoru $\mathbb{R}^n$ definované jako

$$\begin{aligned} ||x||_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i| \\ ||x||_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\ ||x||_\infty &= \max_{i=1,\dots,n} |x_i| \end{aligned}$$

rozhodněte, zda jsou indukované skalárním součinem.

Ukažte následující vztahy:

$$\begin{aligned} ||x||_\infty \le \ & ||x||_1 && \le n||x||_\infty \\ ||x||_\infty \le \ & ||x||_2 && \le \sqrt{n}||x||_\infty \\ ||x||_2 \le \ & ||x||_1 && \le \sqrt{n}||x||_2 \end{aligned}$$

Příklad 5:
Pro neprázdnou množinu X a $n \in \mathbb{N}$ definujme vzdálenost dvou prvků $a, b \in X^n$ jako počet souřadnic, v kterých se liší. Formálně $d(a,b) = |\{i = 1, \dots, n; a_i \neq b_i\}|$. Ukažte, že se jedné o metriku.