# Grafy

Kombinatorika pro bioinformatiky

18.11.2020

## 1 Grafy

**Definice 1** *Graf $G = (V, E)$ je uspořádaná dvojice, kde $V$ je (konečná) množina vrcholů a $E \subseteq \binom{V}{2}$ je množina hran.*

**Příklad:** $G = (\{a, b, c, d, e\}, \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{e, a\}, \{b, d\}\})$

Užití grafů – komunikace (sítě, doprava), el. obvody, diagramy

**Důležité (speciální) typy grafů**

- prázdný graf $E_n = ([n], \emptyset)$
- úplný graf $K_n = ([n], \binom{[n]}{2})$
- cesta $P_n = ([n], \{\{i, i+1\}, i = 1, 2, \ldots, n-1\})$ (délka cesty = počet hran)
- kružnice $C_n = ([n], \{\{i, i+1\}, i = 1, 2, \ldots, n-1\} \cup \{1, n\})$ pro $n \geq 3$
- úplný bipartitní graf $K_{m,n} = (V, E)$, kde $V = V_a \cup V_b, V_a \cap V_b = \emptyset, |V_a| = m, |V_b| = n$ a $E = \{\{a, b\}, a \in V_a, b \in V_b\}$

**Definice 2** *Graf $G = (V, E)$ je bipartitní, pokud $\exists V_a, V_b \subseteq V$ takové, že $V = V_a \cup V_b, V_a \cap V_b = \emptyset$ a pro $\forall e \in E$ platí $|e \cap V_a| = 1 = |e \cap V_b|$.*

# 2 Izomorfismus a podgrafy

**Definice 3** *Ať $G = (V_G, E_G)$ a $H = (V_H, E_H)$ jsou dva grafy, potom zobrazení $f : V_G \to V_H$ se nazývá izomorfismus grafů $G$ a $H$, pokud $f$ je bijekce a platí $\forall u, v \in V_G : \{u, v\} \in E_G \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E_H$.*

**Příklad:** Doplněk grafu $G = (V, E)$ je graf $\overline{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$.

Zajímavý příklad: $C_5 \cong \overline{C_5}$.

**Tvrzení 4** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, potom platí:*

1. *Počet grafů na množině $[n]$ je $2^{\binom{n}{2}}$.*
2. *Počet navzájem neizomorfních grafů na $[n]$ je alespoň $2^{\binom{n}{2}}/n!$.*

**Důkaz: 1)** Graf na množině $V = [n]$ je jednoznačně určen množinou hran. Počet grafů je tedy roven počtu všech možných množin hran, tj. počtu podmnožin množiny všech hran. Počet hran může být nejvýše roven počtu všech dvojic na $n$-prvkové množině, kterých je $\binom{n}{2}$. Počet různých množin hran je tedy $2^{\binom{n}{2}}$.
**2)** Máme-li jeden zafixovaný graf na $V$, pak existuje právě $n!$ permutací jeho vrcholů. Každý izomorfismus dvou grafů na množině $V$ je permutace této množiny (navíc zachovávající hrany) a tedy s jedním zafixovaným grafem nemůže být izomorfních více než $n!$ grafů. Pak ale musí existovat alespoň $2^{\binom{n}{2}}/n!$ navzájem neizomorfních grafů na množině $V$.

$\square$

**Definice 5** *Graf $G = (V_G, E_G)$ je podgrafem grafu $H = (V_H, E_H)$, pokud je $V_G \subseteq V_H$ a $E_G \subseteq E_H$. Píšeme $G \subseteq H$.*

*Je-li $E_G = E_H \cap \binom{V_G}{2}$, nazývá se $G$ indukovaný podgraf.*

*Pro $U \subseteq V_H$ je graf $H[U] = (U, E_H \cap \binom{U}{2})$ podgraf $H$ indukovaný $U$.*

**Poznámka 6** *Cestou / kružnicí v grafu rozumíme podgraf izomorfní cestě / kružnici.*

# 3 Souvislost a vzdálenost

**Definice 7** *Graf $G = (V, E)$ se nazývá souvislý, pokud pro $\forall u, v \in V$ existuje v $G$ cesta z $u$ do $v$. Jinak říkáme, že $G$ je nesouvislý.*

Na cestu v grafu je možné se dívat také následujícím způsobem.
**Cesta** je posloupnost $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots v_{k-1}, e_k, v_k)$ taková, že pro $i = 1, 2, \ldots k$ je $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ a $\forall i \neq j, v_i \neq v_j$ (implikuje $\forall i \neq j, e_i \neq e_j$).

Potom můžeme podobným způsobem definovat tah a sled.
**Tah** je posloupnost $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots v_{k-1}, e_k, v_k)$ taková, že pro $i = 1, 2, \ldots k$ je $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ a $\forall i \neq j, e_i \neq e_j$.
**Sled** je posloupnost $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots v_{k-1}, e_k, v_k)$ taková, že pro $i = 1, 2, \ldots k$ je $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$.

**Pozorování 8** *Každý nejkratší sled spojující dva dané vrcholy grafu je cesta.*

**Důkaz:** Postupujme sporem a předpokládejme, že $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots v_{k-1}, e_k, v_k)$ je nějaký nejkratší sled mezi vrcholy $v_0$ a $v_k$, který však není cestou. Tedy existují $0 \leq i < j \leq k$ indexy takové, že $v_i = v_j$. Potom je $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_i, v_i = v_j, e_j, v_{j+1}, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$ sled mezi $v_0$ a $v_k$ délky $i + (k - j) = k - (j - i) < k$, spor s minimalitou délky původního sledu.

$\square$

**Definice 9** *Definujme relaci $\sim$ na množině $V \times V$: $u \sim v \;\Leftrightarrow \exists$ cesta z $u$ do $v$. Potom je ekvivalence a třídy se nazývají komponenty souvislosti grafu $G$ (tj. $\subseteq$-max. souvislé podgrafy).*

**Definice 10** *Pro $u, v \in V$ je vzdálenost v grafu $G$ rovna délce nejkratší cesty z $u$ do $v$. Pokud žádná taková cesta v $G$ neexistuje ($u, v$ leží v různých komponentách souvislosti $G$), potom píšeme $d(u, v) = \infty$.*

**Tvrzení 11** *Vzdálenost v grafu má vlastnosti metriky:*

1. *$\forall u, v \in V : d(u, v) \geq 0$, navíc $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$,*
2. *$\forall u, v \in V : d(u, v) = d(v, u)$,*
3. *$\forall u, v, w \in V : d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ (trojúhelníková nerovnost).*

**Důkaz:**

$\square$

# 4 Stupeň vrcholu

**Definice 12** *Okolí vrcholu $v \in V$ v grafu $G = (V, E)$ je $N(v) = \{u \in V, \{u, v\} \in E\}$*

**Poznámka 13** *Někdy též zahrnujeme $v$ do svého okolí. Navíc můžeme definovat iterované okolí $N^k(v) = \{u \in V, d(u, v) \leq k\}$ a pak $N^1(v) = N(v) \cup \{v\}$.*

**Definice 14** *Stupeň vrcholu $v \in V$ v grafu $G = (V, E)$ je $\deg(v) = |\{e \in E, v \in e\}| = |N(v)|$.*

**Tvrzení 15 (princip sudosti)** *Pro libovolný graf $G = (V, E)$ platí*

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|\,.$$

**Důkaz:** V sumě je každá hrana započtena dvakrát – jednou za každý vrchol.

$\square$

**Důsledek 16** *Součet stupňů vrcholů libovolného grafu je vždy sudý. To znamená, že počet vrcholů lichého stupně je sudý.*

# 5 Maticové reprezentace grafů

**Definice 17** *$G = (V, E), V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Matice sousednosti grafu $G$ je čtvercová matice $n \times n$ nad $\mathbb{R}$ $A_G = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ taková, že*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \{v_i, v_j\} \in E, \\ 0 & \textit{jinak.} \end{cases}$$

**Příklad:**

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$A_G$ je symetrická s 0 na diagonále, ale závisí na očíslování vrcholů!

**Definice 18** *$G = (V, E), V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Matice incidence grafu $G$ je matice typu $n \times m$ nad $\mathbb{R}$ $I_G = (x_{ij})$ taková, že*

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i \in e_j, \\ 0 & \textit{jinak.} \end{cases}$$