# Dirichletův princip

Kombinatorika pro bioinformatiky

konec října 2020

**Věta 1** *Mějme konečné množiny* $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *takové, že* $|\bigcup_{i=1}^{k} A_i| = n$*. Potom existuje* $i$ *takové, že* $|A_i| \geq \frac{n}{k}$*.*

**Důkaz:** Pro spor předpoládejme, že $|A_i| < \frac{n}{k}$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, k$. Pak

$$|\bigcup_{i=1}^{k} A_i| \leq \sum_{i=1}^{k} |A_i| < \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{k} = k \cdot \frac{n}{k} = n \ .$$

To je spor s předpokladem $|\bigcup_{i=1}^{k} A_i| = n$.

$\square$

**Tvrzení 2** *(Jednoduchý příklad) Mezi každými čtyřmi celými čísly lze nalézt dvě, jejichž rozdíl je dělitelný třemi.*

**Důkaz:** Označme vybranou čtveřici čísel $a_1, a_2, a_3, a_4$, pak pro $i = 1, 2, 3, 4$ lze $a_i$ rozložit dle dělitelnosti třemi do tvaru $a_i = 3b_i + r_i$ pro $b_i$ celé a $r_i \in \{0, 1, 2\}$. Zbytky $r_i$ mohou nabývat pouze tří hodnot, musí se tedy (alespoň) jedna hodnota opakovat.

Zapsáno formálně dle Dirichletova principu: Definujeme množiny $A_0, A_1, A_2$ tak, že $A_t = \{i : r_i = t\}$. Pak $|A_0 \cup A_1 \cup A_2| = 4$ a tedy $\exists t : |A_t| \geq 4/3 > 1$ a tedy nutně $|A_t| \geq 2$.

Z toho máme $i \neq j$ pro které $r_i = r_j$ a dále pak $a_i - a_j = (3b_i + r_i) - (3b_j + r_j) = (3b_i - 3b_j) + (r_i - r_j) = 3(b_i - b_j)$ a důkaz je hotov.

$\square$

**Tvrzení 3** *(Složitější příklad.) Šachysta odehrál v* 77 *dnech celkem nejvýše* 132 *partií, každý den hrál vždy alespoň jednu. Existue několik po sobě následujících dnů, v nichž odehrál dohormady právě* 21 *partií.*

**Důkaz:** Označme $a_i$ počet partií odehraných do $i$-tého dne (včetně). Zadání nám říká

$$1 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_{77} \leq 132 \ .$$

Toto upravíme na

$$22 \leq a_1 + 21 < a_2 + 21 < \ldots < a_{77} + 21 \leq 153 \ .$$

Všimneme si, že $2 \cdot 77 = 154$ čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{77}, a_1 + 21, a_2 + 21, \ldots, a_{77} + 21$ nabývá hodnot v rozmezí $1, \ldots, 153$, tedy se mezi nimi musí někjaké číslo opakovat vícekrát.

Protože čísla $a_1, a_2, \ldots, a_{77}$ jsou všechna různá (rostoucí) a stejně tak i čísla $a_1 + 21, a_2 + 21, \ldots, a_{77} + 21$, znamená to, že existují indexy $i, j$ pro které $a_i = a_j + 21$ (a tedy $i > j$). Z toho $a_i - a_j = 21$ a šachysta ve dnech $j + 1$ až $i$ odehrál právě 21 partií.

$\square$