Kombinatorické počítání

Kombinatorika pro bioinformatiky

14.10.2020

1 Funkce a množiny

Tvrzení 1 *Jsou-li X, Y konečné neprázdné množiny, $|X| = n$, $|Y| = m$, pak počet funkcí $f : X \to Y$ je m^n.*

Důkaz: $X = \{1, 2, \ldots, n\}$

$$
\begin{array}{rcl}
f(1) & \ldots & m \text{ možností} \\
f(2) & \ldots & m \text{ možností} \\
\vdots & & \\
f(n) & \ldots & m \text{ možností} \\
\text{celkem} & & m \cdot m \cdot \ldots \cdot m = m^n \text{ možností}
\end{array}
$$

Formálně – matematickou indukcí dle n:

(i) $n = 0, 1$ OK

(ii) $n \to n + 1$

$$
\begin{aligned}
\text{počet zobr. } f : \{1, 2, \ldots, n, n+1\} \to Y &= \\
(\text{počet zobr. } f : \{1, 2, \ldots, n\} \to Y) \cdot m &= \\
m^n \cdot m &= m^{n+1}\,.
\end{aligned}
$$

$\square$

Tvrzení 2 *Jsou-li X, Y konečné neprázdné množiny, $|X| = n$, $|Y| = m$, pak počet prostých funkcí $f : X \to Y$ je*

$$m(m-1)\dots(m-n+1) = \prod_{i=0}^{n-1}(m-i)\,.$$

Důkaz: $X = \{1, 2, \dots, n\}$

$$\begin{array}{rcl} f(1) & \dots & m \text{ možností} \\ f(2) & \dots & m-1 \text{ možností} \\ \vdots & & \\ f(n) & \dots & m-(n-1) \text{ možností} \\ \text{celkem} & & m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1) \text{ možností} \end{array}$$

$\square$

Poznámka 3 *Předchozí tvrzení platí i pro případ $m < n$, kdy vyjde 0.*

Tvrzení 4 *Počet podmnožin (konečné) n-prvkové množiny X je roven 2^n.*

Důkaz: Matematickou indukcí dle n:

(i) $n = 0, 1$ OK

(ii) $n \to n+1$ fixujme libovolný prvek $x \in X$, $X' = X \setminus \{x\}$

dle ind. předpokladu je $|2^{X'}| = 2^n$, podmnožiny X rozdělíme na dvě skupiny

$$\begin{array}{ll} Y \subseteq X: & x \notin Y, \quad Y \subseteq X', \text{ počet je } 2^n \\ & x \in Y, \quad Y \setminus \{x\} \subseteq X', \text{ počet je } 2^n \end{array}$$

a tedy $|2^X| = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

$\square$

Tvrzení 5 *Počet podmnožin (konečné) neprázdné n-prvkové množiny X takových, že jejich velikost je sudá (lichá) je roven 2^{n-1}.*

Důkaz: fixujme libovolný prvek $x \in X$, $X' = X \setminus \{x\}$, potom $|2^{X'}| = 2^{n-1}$

$\mathcal{S}(X) = \{Y \subseteq X, |Y| \text{ sudá}\}$

definujme $f : \mathcal{S} \to 2^{X'}$ tak, že $f(Y) = Y \setminus \{x\}$, dokážeme, že f je bijekce

prostá – sporem:

$Y_1, Y_2 \in \mathcal{S}$, $Y_1 \neq Y_2$, ale $f(Y_1) = f(Y_2)$ pak se ale obě podmnožiny liší právě jenom v prvku x a tedy jejich velikost se liší o 1, jedna má velikost sudou, druhá lichou, což je spor!

na

$Y' \subseteq X'$

$$\begin{array}{lll} |Y'| & \text{sudá:} & f(Y') = Y' \\ & \text{lichá:} & f(Y' \cup \{x\}) = Y' \end{array}$$

Protože f je bijekce, platí $|\mathcal{S}| = |2^{X'}| = 2^{n-1}$.

Pro liché podmnožiny: $2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$.

$\square$

2 Permutace

Definice 6 *Je-li X (konečná) množina, pak bijekce $\pi : X \to X$ se nazývá permutace množiny X.*

Značení $\{1, 2, \ldots, n\} = [n]$

$S_n = \{\pi$ permutace $[n]\}$ označuje množinu všech permutací na n prvcích

Zápis permutací $n = 6$

1. $\pi(1) = 3, \pi(2) = 4, \pi(3) = 6, \pi(4) = 2, \pi(5) = 5, \pi(6) = 1$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, zkráceně (346251)
3. obrázkovým diagramem
4. popis cyklů $(136)(24)(5)$

Definice 7 *Je-li $\pi \in S_n$, pak $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ je cyklus délky k pokud $x_i \in [n]$, $x_i \neq x_j$ pro $i \neq j$, $\pi(x_i) = x_{i+1}$ pro $i = 1, 2, \ldots, k-1$ a $\pi(x_k) = x_1$.*

Pozorování 8 $|S_n| = \prod_{i=1}^{n} i = n!$ *(pro úplnost dodefinujme $0! = 1$)*

3 Binomické koeficienty

Definice 9 *Pro k, n celá nezáporná čísla, $k \leq n$, je binomický koeficient (kombinační číslo)*

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$

Tvrzení 10 *Je-li X n-prvková množina a k celé nezáporné číslo, $k \leq n$, potom počet k-prvkových podmnožin X je roven číslu $\binom{n}{k}$.*

Důkaz: Nejprve určíme počet uspořádaných k-tic z n-prvkové množiny. Těch je $n(n-1)\ldots(n-k+1)$. Uvážíme-li k-prvkovou podmnožinu, lze ji uspořádat $k!$ způsoby na uspořádanou k-tici. Počet k-prvkových podmnožin je tedy

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} .$$

□

Poznámka 11 *Množinu všech k-prvkových podmnožin množiny X značíme $\binom{X}{k}$, tedy $|\binom{X}{k}| = \binom{|X|}{k}$.*

Důsledek 12

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n .$$

Pozorování 13 *Pro přirozená čísla $n \geq k$ platí*

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$
3. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Důkaz: plyne přímo z definice binomických koeficientů

bod 3. má též zajímavou kombinatorickou interpretaci:

$|X| = n$, fixujme libovolný $x \in X$. Je-li A k-prvková podmnožina X, pak nastane právě jedna z následujících možností:

(i) $x \in A$, $A \setminus \{x\}$ je $(k-1)$-prvková podmnožina $X \setminus \{x\}$, těch je $\binom{n-1}{k-1}$

(ii) $x \notin A$, A je k-prvková podmnožina $X \setminus \{x\}$, těch je $\binom{n-1}{k}$

□

4 Binomická věta

Věta 14 (Binomická věta) *Je-li n celé nezáporné číslo, potom*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k .$$

Důkaz: Postupujeme matematickou indukcí.
(i) $n=0$: $(1+x)^0 = 1 = \binom{0}{0}x^0$
$n=1$: $(1+x)^1 = 1+x = \binom{1}{0}x^0 + \binom{1}{1}x^1$
(ii) Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \geq 1$, chceme ho dokázat pro $n+1$.

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n = (1+x)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right) = \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right) + x\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right) = \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}\right) = \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^k\right) = \\
&= \binom{n}{0}x^0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right)x^k + \binom{n}{n}x^{n+1} = \\
&= \binom{n+1}{0}x^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^k + \binom{n+1}{n+1}x^{n+1} = \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k .
\end{aligned}$$

Při úpravách jsme použili vztahy $1 = \binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$ a vzorec $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.

□

Příklad: Je jasné, že $(1+1)^n = 2^n$, spočtěme tento výraz také podle binomické věty

$$(1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}.$$

Podobně, nulu můžeme napsat jako

$$(1-1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}.$$

Sečteme-li tyto dva výrazy, máme

$$2^n = 2\binom{n}{0} + 0\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \ldots,$$

což, po vydělení dvěma, lze interpretovat jako: Počet podmnožin (n-prvkové množiny) sudé velikosti je 2^{n-1}.

Důsledek 15

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \,.$$

Věta 16 (Multinomická) *Je-li n celé nezáporné číslo, potom*

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_p)^n = \sum_{\substack{k_1, k_2, \ldots, k_p \in \mathbb{Z}_0^+ \\ k_1 + k_2 + \ldots + k_p = n}} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_p} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_p^{k_p} \,,$$

kde $\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_p} = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_p!}$ *se nazývá multinomický koeficient.*

Poznámka 17 $\binom{n}{k} = \binom{n}{k, n-k}$.