(Binární) relace

Kombinatorika pro bioinformatiky

7.10.2020

1 Kartézský součin

Definice 1 *Nechť X a Y jsou dvě (neprázdné) množiny, pak pro $x \in X, y \in Y$ označíme (x, y) uspořádanou dvojici prvků x a y. Dále $X \times Y$ označíme množinu všech uspořádaných dvojic (x, y), kde $x \in X, y \in Y$. Formálně*

$$X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\} \ .$$

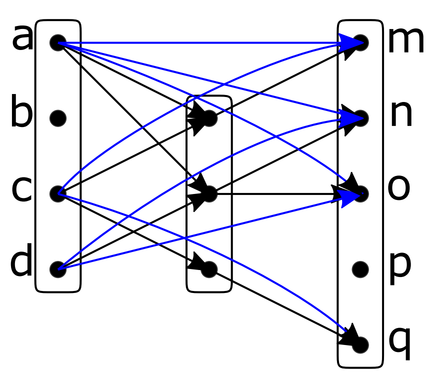
Množinu $X \times Y$ nazýváme kartézským součinem množin X a Y.

Definice 2 *Relací na (neprázných) množinách X a Y nazýváme libovolnou podmnožinu jejich kartéského součinu $R \subseteq X \times Y$.*

Pokud dvojice (x, y) náleží relaci R, tedy $(x, y) \in R$, lze též psát xRy (místo R se pak napíše značka pro konkrétní relaci, se kterou pracujeme).

Definice 3 *Nechť X, Y, Z jsou (neprázdné) množiny a $R \subseteq X \times Y, S \subseteq Y \times Z$ dvě relace. Potom složenou relací $R \circ S$ rozumíme relaci na množinách X a Z takovou, že*

$$(x, z) \in R \circ S \Leftrightarrow (\exists y \in Y : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S) \ .$$



2 Funkce

Definice 4 *Funkce z množiny X do množiny Y je relace $f \subseteq X \times Y$ splňující podmínku, že pro každý prvek $x \in X$ existuje právě jeden prvek $y \in Y$ takový, že $(x, y) \in f$.*

Funci f z X do Y zapisujeme jako $f : X \mapsto Y$ a používáme namísto zápisu $(x, y) \in f$ tradiční značení $f(x) = y$.

Složení funkcí je definováno stejně jako složení relací (stačí převzít definici pro relace a chápat funkce jako relace), je ale vžité odlišné značení. Máme-li funkce $f : X \mapsto Y$ a $g : Y \mapsto Z$, pak jejich složením vznikne funkce $h : X \mapsto Z$ pro kterou $h(x) = g(f(x))$.

Důležité (speciální) druhy funkcí:

Definice 5 *Funkci $f : X \mapsto Y$ nazýváme*

- *prostou (injektivní), pokud pro $x \neq x'$ je vždy $f(x) \neq f(x')$,*
- *funkcí na (surjektivní), pokud $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$,*
- *vzájemně jednoznačnou (bijektivní), jestliže je prostá i na zároveň.*

Tvrzení 6 *Nechť X a Y jsou dve konečné neprázdné množiny a $f : X \mapsto Y$ bijekce. Potom $|X| = |Y|$.*

Důkaz: ponechán jako cvičení.

$\square$

Definice 7 *Bijekce $f : X \mapsto X$ se též nazývá permutace množiny X.*

3 Ekvivalence a uspořádání

Definice 8 *Relace R na množině X ($R \subseteq X \times X$) se nazývá*

- *reflexivní, pokud pro každé $x \in X$ je $(x, x) \in R$,*
- *symetrická, pokud kdykoli je $(x, y) \in R$ je též $(y, x) \in R$,*
- *antisymetrická, jestliže pro všechna $x, y \in R$ platí, že pokud $(x, y) \in R$ a $(y, x) \in R$, pak $x = y$,*
- *tranzitivní, když z $(x, y) \in R$ a $(y, z) \in R$ vždy plyne i $(x, z) \in R$.*

Definice 9 *Řekneme, že relace R na množině X je ekvivalence, pokud je reflexivní, symetrická a tranzitivní.*
Řekneme, že relace R na množině X je (částečné) uspořádání, pokud je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní. Navíc, uspořádání R se nazývá lineární uspořádání, jestliže pro každou dvojici $(x, y) \in X \times X$ je $(x, y) \in R$ nebo $(y, x) \in R$.

Definice 10 *Je-li R ekvivalence na X a $x \in X$, pak $R[x] = \{y \in X | (x, y) \in R\}$ je (rozkladová) třída ekvivalence R určená prvkem x.*

Tvrzení 11 *Mějme ekvivalenci R na množině X, potom*

1. *$\forall x \in X$ je $R[x] \neq \emptyset$,*
2. *$\forall x, y \in X$ je buď $R[x] = R[y]$ nebo $R[x] \cap R[y] = \emptyset$,*
3. *třídy ekvivalence R tvoří rozklad množiny X a jednoznačně určují ekvivalenci R.*

Důkaz: Díky reflexivitě je $(x, x) \in R$ pro každé $x \in X$ a tedy $x \in R[x]$.

Pro důkaz bodu 2 předpokládejme, že $R[x] \cap R[y] \neq \emptyset$ a tedy
$\exists z \in X : z \in R[x] \cap R[y]$, to znamená $(x, z) \in R$ a $(y, z) \in R$.

Ze symetrie a $(y, z) \in R$ dostáváme $(z, y) \in R$. Dále aplikujeme tranzitivitu na $(x, z) \in R$ a $(z, y) \in R$, čímž dostáváme $(x, y) \in R$.

Předpokládejme nyní, že máme prvek $w \in R[y]$. Z definice $(y, w) \in R$ a tranzitivitou (na dvojice (x, y) a (y, w)) dostáváme $(x, w) \in R$. Tedy $w \in R[x]$ a $R[y] \subseteq R[x]$.

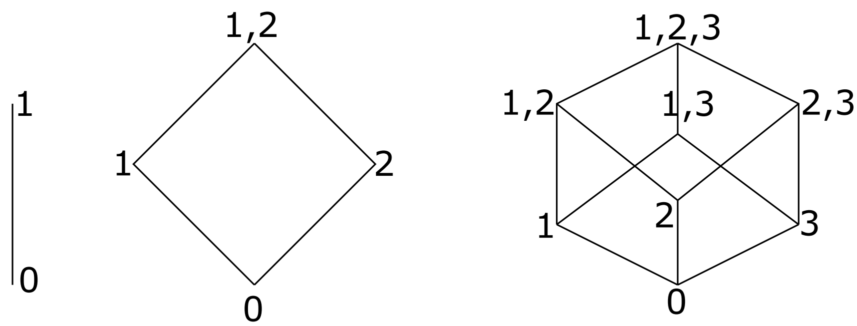
Použitím analogických argumentů lze též získat $R[x] \subseteq R[y]$ a tedy $R[x] = R[y]$.

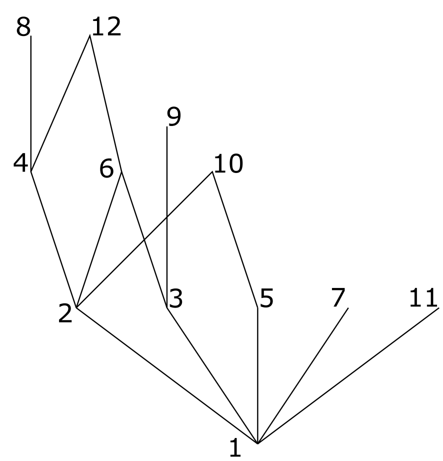
Poslední bod snadno nahlédneme s využitím dvou předchozích.

$\square$

Příklad: Booleovské uspořádání (řádu n) je uspořádání množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ pomocí inkluze, $\mathcal{B}_n = (\{1, 2, \dots, n\}, \subseteq)$.

Vizualizace částečných uspořádání – Hasseho diagramy.





Definice 12 *Nechť R je částečné uspořádání na množině X, potom*

- *$a \in X$ je minimální prvek, jestliže $\forall x \in X : (x, a) \in R \Rightarrow x = a$,*
- *$b \in X$ je nejmenší prvek, jestliže $\forall x \in X : (b, x) \in R$,*
- *$c \in X$ je maximální prvek, jestliže $\forall x \in X : (c, x) \in R \Rightarrow x = c$,*
- *$d \in X$ je největší prvek, jestliže $\forall x \in X : (x, d) \in R$.*
- *k-tice prvků $x_1, \dots x_k$ se nazývá řetězec, pokud $(x_i, x_{i+1}) \in R$ pro všechna $i = 1 \dots k - 1$, velikost největšího řetězce se nazývá délka uspořádání a značí se $\omega(X, R)$.*
- *$A \subseteq X$ se nazývá antiřetězec, pokud každé dva různé prvky z A jsou navzájem neporovnatelné. Velikost největšího antořetězce se nazývá šířka část. uspořádání a značí se $\alpha(X, R)$.*