# Ukázkové příklady z pravděpodobnosti

Kombinatorika pro bioinformatiky

## 1 Výběry s a bez opakováním

V pytlíku je 100 kuliček, z toho 20 černých a zbylých 80 bílých. Vylosujeme náhodně (s vracením, resp. bez vracení) 10 kuliček a zajímá nás pravděpodobnost $P_k$, že mezi vylosovanými bude právě $k$ černých kuliček (pro $k = 0, 1, \ldots, k$).

**a) s vracením**

Pravděpodobnost vztažení kuličky je v každém tahu stejná a nezávislá na výsledku ostatních tahů. Tato pravděpodobnost je

$$p = P[\text{vylosovaná kulička je černá}] = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} \ .$$

Analogicky pro vylosování bílé kuličky máme pravděpodobnost

$$q = P[\text{vylosovaná kulička je bílá}] = \frac{80}{100} = \frac{4}{5} = 1 - p \ .$$

Z toho

$$P_k = \binom{10}{k} p^k q^{10-k} = \binom{10}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{10-k} \ .$$

**b) bez vracení**

Pravděpodobnosti vytažení kuličky určité barvy v různých tazích nejsou nezávislé, protože při postupném losování bez vracení se mění počty kuliček v pytlíku. K výpočtu tedy přistoupíme globálně a budeme jako elemntární jevy brát (neuspořádané) desetice vylosovaných kuliček. Tím dostáváme následující počty možností:

- počet možností, jak vybrat 10 kuliček ze 100 je $\binom{100}{10}$,
- počet možností, jak vybrat $k$ černých kuliček z 20 je $\binom{20}{k}$,
- počet možností, jak vybrat $10 - k$ bílých kuliček z 80 je $\binom{80}{10-k}$,
- počet možností, jak vybrat $k$ černých $10 - k$ bílých je $\binom{20}{k} \cdot \binom{80}{10-k}$.

Z toho

$$P_k = \frac{\binom{20}{k} \cdot \binom{80}{10-k}}{\binom{100}{10}} \ .$$

## 2 Míčky v krabicích

**Příklad:** Mějme $n$ krabic, v $k$-té krabici (číslováno od 0 do $n-1$) je $k$ černých a $n-1-k$ bílých míčků. Nejprve vyberu náhodně (uniformě) jednu z krabic a z ní vylosuji dva míčky (bez vracení). Jaká je pravděpodobnost, že

a) první míček je černý,

b) druhý míček je černý,

c) druhý míček je černý, jestliže první je také černý.

**Řešení:**
a) Buď lze nahlédnout, že každý míček vylosujeme se stejnou pravděpodobností $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$ a celkově je stejný počet bílých i černých míčků, takže pravděpodonost vylosvání černého míčku je $\frac{1}{2}$.

Druhým způsobem, který je více založen na počítání, je že spočteme nejprve pravděpodobnost vylosování černého míčku za podmínky, že jsme vybrali $k$-tou krabici ($k = 0, \ldots, n-1$)

$$P[\text{černý}|\text{krabice} = k] = \frac{k}{n-1} \; .$$

Pak podle věty o úplné pravděpodobnosti je

$$\begin{aligned} P[\text{černý}] &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n-1} \cdot P[\text{krabice} = k] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{n(n-1)} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2} \; . \end{aligned}$$

b) Postup i výsledek totožný s a).
c) Chceme spočítat podmíněnou pravděpodobnost, kterou si nejprve rozepíšeme podle definice

$$P[\text{druhý černý}|\text{první černý}] = P[C_2|C_1] = \frac{P[C_2 \cap C_1]}{P[C_1]} \; ,$$

kde pravděpodobnost z jmenovatele známe z části a), $P[C_1] = \frac{1}{2}$.

Pravděpodobnost, že v obou tazích (z téže krabice) vylosujeme černé míčky opět nejprve spočteme za podmínky, že známe, kterou krabici používáme

$$P[C_1 \cap C_2|\text{krabice} = k] = \frac{k}{n-1} \cdot \frac{k-1}{n-2} \; .$$

Ještě si uvědomíme, že pro $k = 0$ a $k = 1$ je tato pravděpodobnost nulová a není tedy nutné s ní dále počítat.

Potom (dle věty o úplné pravděpodonosti) je čitatel zlomku

$$\begin{aligned}
P[C_1 \cap C_2] &= \sum_{k=2}^{n-1} P[C_1 \cap C_2|\text{krabice} = k]P[\text{krabice} = k] = \\
&= \sum_{k=2}^{n-1} \frac{k}{n-1} \cdot \frac{k-1}{n-2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{\sum_{k=2}^{n-1} k(k-1)}{n(n-1)(n-2)} = \\
&= \frac{\sum_{k=2}^{n-1} 2\binom{k}{2}}{6\binom{n}{3}} = \frac{\sum_{k=2}^{n-1} \binom{k}{2}}{3\binom{n}{3}} = \frac{\binom{n}{3}}{3\binom{n}{3}} = \frac{1}{3} \; .
\end{aligned}$$

Známe tedy čitatele i jmenovate zlomku a stačí dosadit

$$P[C_2|C_1] = \frac{P[C_2 \cap C_1]}{P[C_1]} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \; .$$

## 3 Odlišné kostky

**Příklad:** Mějme tři šestistěnné kostky takové, že první kostka má na jedné stěně „puntík“ a zbývajících pět prázdných, druhá má tři stěny s puntíkem a tři prázdné a poslední kostka ma pouze jednu prázdnou stěnu, ostatní s puntíkem (u všech kostek je vždy na stěně jeden nebo žádný puntík).

a) Náhodně (uniformně) vyberu jednu z kostek a tou hodím. Jaká je pravděpodobnost, že padne puntík?

b) Náhodně (uniformně) vyberu jednu z kostek a tou hodím. Jaká je pravděpodobnost, že se jedná o $k$-tou kostku ($k = 1, 2, 3$), pokud mi padl puntík?

c) Hodím všemi třemi kostkami najednou a spočtu celkový počet puntíků, které padly. Pro $n = 0, 1, 2, 3$ určete pravděpodobnost, že součet je roven právě $n$.

d) Hodím všemi třemi kostkami najednou. Jaká je střední hodnota počtu puntíků, které padly na všech kostkách dohromady?

**Řešení:**
a) Pravděpodobnost výběru každé ze tří kostek je stejná, tedy

$$P[k = 1] = P[k = 2] = P[k = 3] = \frac{1}{3} \; .$$

Pro každou z kostek snadno určíme podmíněnou pravděpodobnost, že na ní padl puntík

$$P[\bullet|k = 1] = \frac{1}{6} \quad P[\bullet|k = 1] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad P[\bullet|k = 1] = \frac{5}{6} \; .$$

Dle věty o úplné pravděpodobnosti pak

$$P[\bullet] = \sum_{i=1}^{3} P[\bullet|k=i] \cdot P[k=i] = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right) = \frac{1}{2} \ .$$

b) Dle Bayesovy věty je pro $j = 1,2,3$ je

$$P[k=i|\bullet] = \frac{P[\bullet|k=j]\cdot P[k=j]}{\sum_{i=1}^{3} P[\bullet|k=i]\cdot P[k=i]} = \frac{P[\bullet|k=j]\cdot P[k=j]}{P[\bullet]} \ ,$$

kde jmenovate jsme spočetli v části a).

Za čitatele postupně dosadíme

$$\begin{aligned} P[k=1|\bullet] &= \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{9} \ , \\ P[k=2|\bullet] &= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \ , \\ P[k=3|\bullet] &= \frac{\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{9} \ . \end{aligned}$$

c) Označme $X$ počet puntíků, které padnou při hodu všech tří kostek. Jedná se náhodnou proměnnou nabývajících možných hodnot $0,1,2,3$. Pravděpodobnost puntíku na první kostce je $p_1 = \frac{1}{6}$, na druhé kostce $p_2 = \frac{1}{2}$ a na třetí to je $p_3 = \frac{5}{6}$. Potom

$$\begin{aligned} P[X=0] &= (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{5}{72} \ , \\ P[X=1] &= p_1(1-p_2)(1-p_3) + (1-p_1)p_2(1-p_3) + (1-p_1)(1-p_2)p_3 = \\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6} = \frac{31}{72} \ , \\ P[X=2] &= p_1p_2(1-p_3) + p_1(1-p_2)p_3 + (1-p_1)p_2p_3 = \\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6} = \frac{31}{72} \ , \\ P[X=3] &= p_1p_2p_3 = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{72} \ . \end{aligned}$$

d) S použitím výsledků předchozího bodu

$$EX = \sum_{i=0}^{3} i\cdot P[X=i] = 0\cdot\frac{5}{72} + 1\cdot\frac{31}{72} + 2\cdot\frac{31}{72} + 3\cdot\frac{5}{72} = \frac{108}{72} = \frac{3}{2} \ .$$

Druhou možností je použití linearity střední hodnoty na náhodné veličiny $X_i$ označující počet puntíků na $i$-té kostce ($i = 1,2,3$). Potom $X = X_1 + X_2 + X_3$ a

$$EX = EX_1 + EX_2 + EX_3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{5}{6} = \frac{3}{2} \ .$$

(Tento postup by byl rozhodně jednodušší, pokud bysme neměli spočtené pravděpodobnosti z části c).)