Eulerovské grafy

Kombinatorika pro bioinformatiky

16.12.2020

1 Eulerovské grafy

Definice 1 *Tah* $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$ *se nazývá uzavřený, pokud* $v_0 = v_k$. *(Uzavřený) tah je eulerovský, pokud obsahuje všechny hrany grafu a graf je eulerovský, pokud má uzavřený eulerovský tah.*

Věta 2 *Graf* G *je eulerovský právě tehdy, když každý vrchol* G *má sudý stupeň a* G *je (až na izolované vrcholy) souvislý.*

Důkaz:

$\square$

Definice 3 *Orientovaný graf* $\vec{G} = (V, \vec{E})$ *se skládá z množiny vrchlů* V *a množiny (orientovaných) hran* $\vec{E} \subseteq V \times V$.

Pro $v \in V$ *je vstupní stupeň vrcholu* $\deg_{in}(v) = |\{u \in V, (u, v) \in \vec{E}\}|$ *a výstupní stupeň* $\deg_{out}(v) = |\{u \in V, (v, u) \in \vec{E}\}|$.

Tah v orientovném grafu je posloupnost $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$, *kde* $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ *pro* $i = 1, 2, \ldots, k$ *a* $e_i \neq e_j$ *pro* $i \neq j$.

Věta 4 *Orientovaný graf* G *(bez izolovných vrcholů) má uzavřený orientovaný tah procházející všemi hranami právě tehdy, když* G *(bez orientace) je souvislý a pro* $\forall v \in V$ *platí* $\deg_{in}(v) = \deg_{out}(v)$.

Aplikace – problém kotouče Na obvodu kotouče (kruhu) jsou čísla 0 a 1 tak, že libovolná k-tice po sobě jdoucích čísel je zde nejvýše jednou. Jaký je maximální obvod $kotouc(k)$ (počet čísel) takového kotouče?

Tvrzení 5 *Pro* $\forall k \in N$ *je* $kotouc(k) = 2^k$.

Důkaz: Sestrojme orientovaný graf $G = (V, E)$ následovně:

$$\begin{aligned} V &= \{0,1\}^{k-1}, \\ E &= \{((x_1, \ldots, x_{k-1}), (y_1, \ldots, y_{k-1}))|x_{i+1} = y_i \text{ pro } i = 1, \ldots, k-2\}. \end{aligned}$$

Ukážeme, že tento graf má uzavřený tah procházející přes všechny jeho hrany.

Musíme ověřit, že graf (bez orientace) je souvislý (jednoduché) a pro každý vrchol $v \in V$ je $\deg_{in}(v) = \deg_{out}(v)$. Nahlédneme, že z vrcholu $v = (x_1, \ldots, x_{k-1})$ vedou právě dvě hrany – do vrcholů $(x_2, \ldots, x_{k-1}, 0)$ a $(x_2, \ldots, x_{k-1}, 1)$ a do v vedou taktéž dvě hrany – z $(0, x_1, \ldots, x_{k-2})$ a $(1, x_1, \ldots, x_{k-2})$.

Nyní uvažme uzavřený tah procházející všemi hranami grafu. Z předchozího víme, že takový tah existuje a jeho délka je rovna $|E| = 2^k$. Procházíme-li podél tohoto tahy dostáváme posloupnost vrcholů délky 2^k (je zřejmé, že každý vrchol je podél tohoto tahu navštíven dvakrát) $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{2^k} = v_0$ (počáteční vrchol indexuji 0 a nebudu s ním pracovat na začátku, ale až na konci tahu). Každý z vrcholů je nějaká k-tice bitů a my si při procházení tahu zapíšeme vždy první z nich. Formálně, definujeme posloupnost $(a_i)_{i=1}^{2^k}$ tak, že $a_i = x_{i,1}$, kde $v_i = (x_{i,1}, \ldots, x_{i,k-1})$. Díky tomu, že procházíme podél uzavřeného tahu délky 2^k dostáváme poslpounost délky 2^k, která navíc (bráno cyklicky) obsahuje každou k-tici po sobě následujících čísel právě jednou (neboť každá hrana je projita právě jednou).

$\square$

Příklad:

$kotouc(2) = 4$

$kotouc(3) = 8$