

# Platónská tělesa

## Kombinatorika pro bioinformatiky

16.12.2020

**Věta 1** *Bud'  $G = (V, E)$  souvislý roviný graf a označme  $s$  počet stěn (nějakého) roviného nakreslení  $G$ . Potom  $|V| - |E| + s = 2$ .*

Pro další si zavedeme značení  $n = |V|, m = |E|$  a výše uvedený vztah přepíšeme  $n - m + s = 2$ .

**Definice 2** *Platónským tělesem nazýváme 3-dimenzionální konvexní těleso, jehož každá stěna je pravidelný  $k$ -úhelník a v každém vrcholu se stýká  $d$  stěn, pro nějaká  $k, d \in \mathbb{N}$ .*

Místo 3-dimenzionálních tělů budeme pracovat s jejich grafy – ty musí být roviné, všechny stěny budou ohraničeny  $C_k$  a pro každý vrchol  $v$  je  $\deg(v) = d$ .

Princip sudosti aplikovaný na hrany nám dává vztah  $2m = dn$  a aplikovaný na stěny vztah  $2m = ks$ . Jejich kombinací získáme vztah mezi počtem vrcholů a hran  $dn = ks$ .

Z geometrických vlastností pravidelných mnohoúhelníků snadno nahlédneme, že u vrcholu konvexního tělesa se mohou stýkat trojúhelníky ( $k = 3, d = 3, 4, 5$ ), čtverce ( $k = 4, d = 3$ ) nebo pětiúhelníky ( $k = 5, d = 3$ ). Rozborem možností dopočteme ostatní parametry a zjistíme o jaká tělesa se jedná:

$$k = 3, d = 3:$$

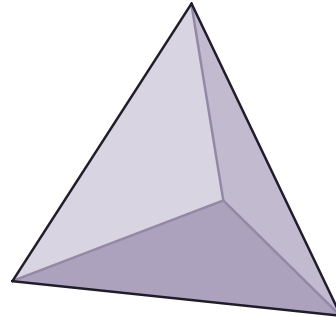
dosazením do vztahu  $dn = ks$  získáme  $3n = 3s$  a tedy  $n = s$

podobně z  $2m = ks$  získáme  $2m = 3s$  a tedy  $m = \frac{3}{2}s$

dosazením do Eulerovy formule  $2 = n - m + s = s - \frac{3}{2}s + s = \frac{1}{2}s$

získáme  $s = 4$

těleso by tak měl být **čtyřstěn** a lze dopočítat  $n = 4$  a  $m = 6$



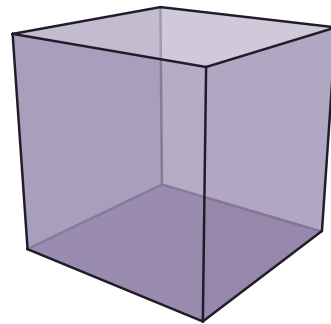
$$k = 4, d = 3:$$

$$dn = ks \rightarrow 3n = 4s \rightarrow n = \frac{4}{3}s$$

$$2m = ks \rightarrow 2m = 4s \rightarrow m = \frac{4}{2}s$$

$$2 = n - m + s = \frac{4}{3}s - \frac{4}{2}s + s = \frac{1}{3}s \rightarrow s = 6$$

těleso je **šestistěn** neboli **krychle** a  $n = 8$  a  $m = 12$



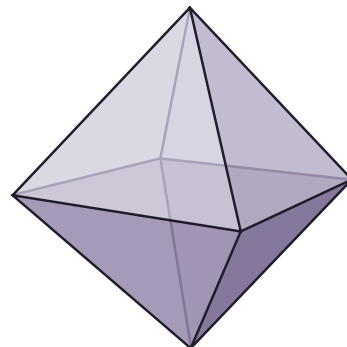
$$k = 3, d = 4:$$

$$dn = ks \rightarrow 4n = 3s \rightarrow n = \frac{3}{4}s$$

$$2m = ks \rightarrow 2m = 3s \rightarrow m = \frac{3}{2}s$$

$$2 = n - m + s = \frac{3}{4}s - \frac{3}{2}s + s = \frac{1}{4}s \rightarrow s = 8$$

těleso je **osmistěn** a  $n = 6$  a  $m = 12$



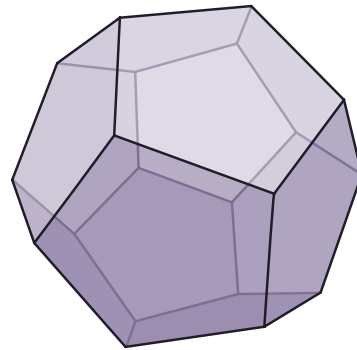
$$k = 5, d = 3:$$

$$dn = ks \rightarrow 3n = 5s \rightarrow n = \frac{5}{3}s$$

$$2m = ks \rightarrow 2m = 5s \rightarrow m = \frac{5}{2}s$$

$$2 = n - m + s = \frac{5}{3}s - \frac{5}{2}s + s = \frac{1}{6}s \rightarrow s = 12$$

těleso je **dvanáctistěn** a  $n = 20$  a  $m = 30$



$$k = 3, d = 5:$$

$$dn = ks \rightarrow 5n = 3s \rightarrow n = \frac{3}{5}s$$

$$2m = ks \rightarrow 2m = 3s \rightarrow m = \frac{3}{2}s$$

$$2 = n - m + s = \frac{3}{5}s - \frac{3}{2}s + s = \frac{1}{10}s \rightarrow s = 20$$

těleso je **dvacetistěn** a  $n = 12$  a  $m = 30$

