Roviné grafy

Kombinatorika pro bioinformatiky

2.12.2020

1 Roviné grafy

Definice 1 *Obloukem budeme nazývat množinu (obor) hodnot prosté a spojité funkce* $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$.

Roviné nakreslení grafu $G = (V, E)$ *je (dvojice) zobrazení* $f : V \to \mathbb{R}^2$, $f : E \to \{oblouky\}$ *takové, že* $f(u) \neq f(v)$ *pro* $u, v \in V, u \neq v$, *pro* $\forall e \in E, e = \{u, v\}$ *je* $\{f(e)(0), f(e)(1)\} = \{f(u), f(v)\}$ *a pro* $e, e' \in E, e \neq e'$ *a* $\forall s, t \in (0,1)$ *je* $f(e)(s) \neq f(e')(t)$.

Graf G je roviný, pokud má roviné nakreslení.

Příklad: Stromy, kružnice jsou roviné grafy.

Roviné nakreslení není jednoznačné

Věta 2 (pro zajímavost) *Libovolný roviný graf lze nakreslit do roviny tak že všechny oblouky odpovídající hranám jsou úsečky.*

Poznámka 3 *Grafy lze kreslit i na jiné plochy (torus, Möbiův list, ...)*

Poznámka 4 *Kreslení na sféru a do roviny si jednoznačně odpovídá – stereografická projekce.*

Definice 5 *Stěny rovinného nakreslení grafu jsou maximální souvislé oblasti (komponenty) $\mathbb{R}^2 \setminus X$, kde X jsou všechny body nakreslení grafu (vrcholy a body oblouků).*

Pozorování 6 *Vždy je jedna stěna neomezená, tzv. vnější stěna.*

Definice 7 *Topologická kružnice je množina obrazů spojité funkce $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ takové, že pro $r < s$ je $\varphi(r) = \varphi(s)$ právě tehdy, když $r = 0, s = 1$.*

Věta 8 (Jordanova věta o kružnici) *Topologická kružnice dělí rovinu na dvě části.*

Pozorování 9 *Hranice stěny nemusí být topologická kružnice (ani kružnice v grafu).*

Tvrzení 10 *Je-li G 2-souvislý rovinný graf, potom je hranice každé stěny topologická kružnice.*

Důkaz: Pro danou stěnu rovinného nakreslení grafu G uvažme uzavřený sled obcházející stěnu (právě jednou dokola). Jestliže se některý vrchol grafu vyskytne v tomto sledu dvakrát, pak je zřejmé, že po jeho odebrání vzniknou alespoň dvě komponenty souvislosti. To není možné, neboť graf G je 2-souvislý.

Z toho plyne, že se žádný vrchol na sledu neopakuje a tedy se jedná o kružnici v grafu. Body rovinného nakreslení kružnice potom tvoří topologickou kružnici v rovině.

□

Věta 11 *Buď $G = (V, E)$ souvislý roviný graf a označme s počet stěn (nějakého) rovinného nakreslení G. Potom $|V| - |E| + s = 2$.*

Důkaz: Protože graf G je souvislý, má nějakou kostru. V důkaze postupujme matematickou indukcí podle počtu hran G mimo libovolnou (ale pevně zvolenou) kostru. Jelikož kostra má $|V| - 1$ hran, je toto číslo rovno $|E| - (|V| - 1) \geq 0$.

Je-li G strom, tento počet hran mimo kostru je nula. Navíc má každé jeho nakreslení jednu stěnu a vzorec platí.

Pokud G není strom (ale je souvislý), existuje hrana $e \in E$ taková, že $G \setminus e$ je souvislý (stačí zvolit e mimo vybranou kostru). Podle indukčního předpokladu $|V| - (|E| - 1) + s(G \setminus e) = 2$. Přidáním hrany e zpět do grafu rozdělíme jednu stěnu na dvě nové, tedy $s = s(G \setminus e) + 1$. Z toho $|V| - |E| + s = |V| - |E| + (s(G \setminus e) + 1) = |V| - (|E| - 1) + s(G \setminus e) = 2$.

$\square$

Tvrzení 12 (maximální počet hran rovinného grafu) *Je-li $G = (V, E)$ roviný a $|V| \geq 3$, potom*

1. *$|E| \leq 3|V| - 6$,*
2. *navíc, pokud $K_3 \not\subseteq G$, pak $|E| \leq 2|V| - 4$.*

Důkaz: Označme $\deg(F)$ počet hran na hranici stěny F (počítáno s násobností). Neobsahuje-li G izolované vrcholy a je-li $|V| \geq 3$, pak je $\deg(F) \geq 3$ pro každou stěnu grafu (resp. $\deg(F) \geq 4$, neobsahuje-li graf trojúhelník).

Podobně jako pro stupně vrcholů, i zde platí $\sum_F \deg(F) = 2|E|$. Je-li počet stěn rovinného nakreslení G roven s, dostáváme $2|E| = \sum_F \deg(F) \geq 3s$ (resp. $2|E| \geq 4s$).

V kombinaci s Eulerovou formulí tedy (dosadíme za s odhad z předchozího vzorce) $|V| - |E| + \frac{2}{3}|E| \geq 2$ (resp. $|V| - |E| + \frac{2}{4}|E| \geq 2$). Upravujeme $|V| - |E|/3 \geq 2$ (resp. $|V| - |E|/2 \geq 2$) a dostáváme $3|V| - 6 \geq |E|$ (resp. $2|V| - 4 \geq |E|$).

$\square$

Důsledek 13 *Každý roviný graf obsahuje vrchol stupně nejvýše 5. Navíc, neobsahuje-li roviný graf trojúhelník, potom má vrchol stupně nejvýše 3.*

Důsledek 14 *Grafy K_5 ani $K_{3,3}$ nejsou roviné (a tedy ani jejich dělení).*

Věta 15 (Kuratowski) *Graf G je roviný právě tehdy, když G neobsahuje dělení K_5 ani $K_{3,3}$ jako podgraf.*

Definice 16 *Mějme roviné nakreslení grafu $G = (V, E)$, duální graf $G^* = (\{F_1, \ldots F_s\}, E^*)$ je takový, že $\{F_i, F_j\} \in E^*$ právě tehdy, když stěny F_i a F_j mají společnou hranu na svojí hranici.*

Příklad: $(K_4)^* = K_4$

Pozorování 17 *Duální graf roviného graf je roviný.*

Pozorování 18 *Připustíme-li smyčky a násobné hrany, pak $|E(G)| = |E(G^*)|$ a $(G^*)^* \cong G$.*