Rovinné grafy

Kombinatorika pro bioinformatiky (NDMI089)

RNDr. Ondřej Pangrác, Ph.D.

Rovinné grafy

Definice

Obloukem budeme nazývat množinu (obor) hodnot prosté a spojité funkce $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$.
rovinné nakreslení grafu $G = (V, E)$ *je (dvojice) zobrazení* $f : V \to \mathbb{R}^2$,
$f : E \to \{oblouky\}$ *takové, že* $f(u) \neq f(v)$ *pro* $u, v \in V, u \neq v$,
pro $\forall e \in E, e = \{u, v\}$ *je* $\{f(e)(0), f(e)(1)\} = \{f(u), f(v)\}$
a pro $\forall e, e' \in E, e \neq e'$ *a* $\forall s, t \in (0,1)$ *je* $f(e)(s) \neq f(e')(t)$.
Graf G je rovinný, pokud má rovinné nakreslení.

Příklad:

- stromy, kružnice jsou rovinné grafy
- rovinné nakreslení není jednoznačné

Rovinné grafy

Věta (pro zajímavost)

Libovolný rovinný graf lze nakreslit do rovinny tak že všechny oblouky odpovídající hranám jsou úsečky.

Poznámka

Grafy lze kreslit i na jiné plochy (torus, Möbiův list, ...)

Poznámka

Kreslení na sféru a do rovinny si jednoznačně odpovídá – stereografická projekce.

Stěny nakreslení

Definice

Stěny rovinného nakreslení grafu jsou maximální souvislé oblasti (komponenty) $\mathbb{R}^2 \setminus X$, kde X jsou všechny body nakreslení grafu (vrcholy a body oblouků).

Pozorování

Vždy je jedna stěna neomezená, tzv. vnější stěna.

Definice

Topologická kružnice je množina obrazů spojité funkce $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ takové, že pro $r < s$ je $\varphi(r) = \varphi(s)$ právě tehdy, když $r = 0, s = 1$.

Věta (Jordanova věta o kružnici)

Topologická kružnice dělí rovinnu na dvě části.

Pozorování

Hranice stěny nemusí být topologická kružnice (ani kružnice v grafu).

Eulerova formule

Věta

Buď $G = (V, E)$ *souvislý rovinný graf a označme* s *počet stěn (nějakého) rovinného nakreslení* G*. Potom* $|V| - |E| + s = 2$*.*

Důkaz: Protože graf G je souvislý, má nějakou kostru. V důkaze postupujme matematickou indukcí podle počtu hran G mimo libovolnou (ale pevně zvolenou) kostru. Jelikož kostra má $|V| - 1$ hran, je toto číslo rovno $|E| - (|V| - 1) \geq 0$.
Je-li G strom, tento počet hran mimo kostru je nula. Navíc má každé jeho nakreslení jednu stěnu a vzorec platí.
Pokud G není strom (ale je souvislý), existuje hrana $e \in E$ taková, že $G \setminus e$ je souvislý (stačí zvolit e mimo vybranou kostru). Podle indukčního předpokladu $|V| - (|E| - 1) + s(G \setminus e) = 2$. Přidáním hrany e zpět do grafu rozdělíme jednu stěnu na dvě nové, tedy $s = s(G \setminus e) + 1$. Z toho
$|V| - |E| + s = |V| - |E| + (s(G \setminus e) + 1) = |V| - (|E| - 1) + s(G \setminus e) = 2$.

Maximální počet hran rovinného grafu

Tvrzení

Je-li $G = (V, E)$ *rovinný a* $|V| \geq 3$*, potom*

1. $|E| \leq 3|V| - 6$,
2. *navíc, pokud* $K_3 \not\subseteq G$*, pak* $|E| \leq 2|V| - 4$.

Důkaz: Označme $\deg(F)$ počet hran na hranici stěny F (počítáno s násobností).
Neobsahuje-li G izolované vrcholy a je-li $|V| \geq 3$, pak je $\deg(F) \geq 3$ pro každou stěnu grafu (resp. $\deg(F) \geq 4$, neobsahuje-li graf trojúhelník).
Podobně jako pro stupně vrcholů, i zde platí $\sum_F \deg(F) = 2|E|$. Je-li počet stěn rovinného nakreslení G roven s, dostáváme $2|E| = \sum_F \deg(F) \geq 3s$ (resp. $2|E| \geq 4s$).
V kombinaci s Eulerovou formulí tedy (dosadíme za s odhad z předchozího vzorce) $|V| - |E| + \frac{2}{3}|E| \geq 2$ (resp. $|V| - |E| + \frac{2}{4}|E| \geq 2$). Upravujeme $|V| - |E|/3 \geq 2$ (resp. $|V| - |E|/2 \geq 2$) a dostáváme $3|V| - 6 \geq |E|$ (resp. $2|V| - 4 \geq |E|$).

Důsledky

Tvrzení

Je-li $G = (V, E)$ *rovinný a* $|V| \geq 3$*, potom*

1. $|E| \leq 3|V| - 6$,
2. *navíc, pokud* $K_3 \not\subseteq G$*, pak* $|E| \leq 2|V| - 4$.

Důsledek

Každý rovinný graf obsahuje vrchol stupně nejvýše 5*. Navíc, neobsahuje-li rovinný graf trojúhelník, potom má vrchol stupně nejvýše* 3*.*

Důsledek

Grafy K_5 *ani* $K_{3,3}$ *nejsou rovinné (a tedy ani jejich dělení).*

Věta (Kuratowski)

Graf G *je rovinný právě tehdy, když* G *neobsahuje dělení* K_5 *ani* $K_{3,3}$ *jako podgraf.*

Duální graf

Definice

Mějme rovinné nakreslení grafu $G = (V, E)$, *duální graf* $G^* = (\{F_1, \dots F_s\}, E^*)$ *je takový, že* $\{F_i, F_j\} \in E^*$ *právě tehdy, když stěny* F_i *a* F_j *mají společnou hranu na svojí hranici.*

Příklad: $(K_4)^* \cong K_4$

Pozorování

Duální graf rovinného graf je rovinný.

Pozorování

Připustíme-li smyčky a násobné hrany, pak $|E(G)| = |E(G^*)|$ *a* $(G^*)^* \cong G$.