Princip inkluze a exkluze – aplikace

Kombinatorika pro bioinformatiky (NDMI089)

RNDr. Ondřej Pangrác, Ph.D.

Problém šatnářky

Do klubu přicházejí večer pánové a každý z nich si v šatně odloží klobouk. Šatnářka je však roztržitá a nepamatuje si, který klobouk komu patří. Rozdává je tedy pánům při odchodu zcela náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že žádný z pánů nedostane zpět svůj klobouk?

Rozdání klobouků je vlastně permutace, ptáme se tedy na to, jaká je pravděpodobnost, že náhodně zvolená permutace nemá pevný bod (tj. i takové, že $\pi(i) = i$). Označme

$$\check{s}(n) = \text{ počet permutací bez pevného bodu na množině } \{1, 2, \ldots, n\}$$

Potom hledaná pravděpodobnost bude $\check{s}(n)/n!$.

Problém šatnářky

Tvrzení

Pro $n \geq 1$ je $\check{s}(n) = n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!})$.

Důkaz:

Označme $F_i = \{\pi \in S_n, \pi(i) = i\}$, potom $\check{s}(n) = |S_n \setminus \bigcup_{i=1}^n F_i| = n! - |\bigcup_{i=1}^n F_i|$.
Pro výpočet $|\bigcup_{i=1}^n F_i|$ použijeme PIE. Nejprve si určíme $\left|\bigcap_{i\in I} F_i\right|$.
Snadno nahlédneme, že prvky $\bigcap_{i\in I} F_i$ jsou právě ty permutace$\pi \in S_n$, pro které $\pi(i) = i$ pro $\forall i \in I$. Proto $\left|\bigcap_{i\in I} F_i\right| = (n - |I|)!$.
Lze tedy počítat

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i=1}^n F_i\right| &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (n - |I|)! = \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!}\,.\end{aligned}$$

Problém šatnářky

Tedy

$$š(n) = n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!} = n! \left(1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!} \right) = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!} \,.$$

$\square$

Důsledek

Pravděpodobnost, že žádný z pánů nedostane zpět svůj klobouk se blíží $1/e \doteq 0.368787\ldots$.

Důkaz: $p = \frac{š(n)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \to e^{-1}$, neboť $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

$\square$

Počet surjekcí

Věta

Nechť X, Y jsou konečné množiny, $|X| = n, |Y| = m$ a $n \geq m > 0$. Potom počet zobrazení f množiny X na množinu Y je $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^n$.

Důkaz: Počet všech funkcí z X do Y je m^n.
Dále si označíme prvky množiny Y jako $y_1, y_2, \dots, y_m$ a definujeme množiny $F_i = \{f : X \mapsto Y | \nexists x \in X : f(x) = y_i\}$ pro $i = 1, 2, \dots, m$.
Pak množina $\bigcup_{i=1}^{m} F_i$ je právě množina funkcí které nejsou surjektivní a její mohutnost stačí odečíst od počtu všech funkcí. Mohutnost této množiny spočteme s použitím principu inkluze a exkluze

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i=1}^{m} F_i\right| &= \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\sum_{I\in\binom{\{1,\dots,m\}}{k}}\left|\bigcap_{i\in I} F_i\right| \\ &= \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\binom{m}{k}(m-k)^n\end{aligned}$$

Počet surjekcí

Počet surjekcí je pak

$$m^n - \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \binom{m}{k} (m-k)^n$$

což lze ještě upravit

$$m^n + \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k} \binom{m}{k} (m-k)^n = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{k} \binom{m}{k} (m-k)^n$$

$\square$

Výslednou sumu stačí počítat jen do $k = m - 1$, pro $k = m$ je sčítanec nulový. Na rozdíl od počítání prostých funkcí je zde třeba mít podmínku na mohutnost množin, neboť pro $|Y| > |X|$ neexistuje surjektivní funkce, ale výraz může být nenulový.

Eulerova funkce

Definice

$\varphi(n) =$ *počet čísel z* $1, 2, \ldots, n$ *nesoudělných s* n

Tvrzení

Ať $n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$ *je prvočíselný rozklad (tj.* $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *různá prvočísla,* $e_i \geq 1$*). Potom* $\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \ldots (1 - \frac{1}{p_k})$.

Důkaz:

Pro $i = 1, 2, \ldots, k$ definujme $A_i = \{a \in \{1, 2, \ldots, n\}, p_i \backslash a\}$.

Potom zřejmě $\bigcup_{i=1}^k A_i$ je množina všech čísel z $1, 2, \ldots, n$ soudělných s n.

Tedy $\varphi(n) = n - \left|\bigcup_{i=1}^k A_i\right|$.

$$
\begin{aligned}
|A_i| &= \frac{n}{p_i} \\
|A_i \cap A_j| &= \frac{n}{p_i p_j}, \ i \neq j \\
\left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| &= \frac{n}{\prod_{i \in I} p_i}.
\end{aligned}
$$

Eulerova funkce

Takže dle PIE

$$
\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| &= \sum_{I\in 2^{[k]}\setminus\emptyset} (-1)^{|I|+1}\frac{n}{\prod_{i\in I} p_i} \\
&= n\left(\frac{1}{p_1}+\ldots+\frac{1}{p_k}-\frac{1}{p_1p_2}-\ldots+\frac{1}{p_1p_2p_3}+\ldots+(-1)^{k+1}\frac{1}{p_1\ldots p_k}\right)
\end{aligned}
$$

a

$$
\begin{aligned}
\varphi(n) &= n\left(1-\frac{1}{p_1}-\ldots-\frac{1}{p_k}+\frac{1}{p_1p_2}+\ldots+(-1)^{k}\frac{1}{p_1\ldots p_k}\right) \\
&= n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right).
\end{aligned}
$$

$\square$

Eulerova funkce

Poznámka

$$\varphi(n) = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = \prod_{i=1}^{k} \left(p_i^{e_i} - p_i^{e_i - 1}\right)$$

Alternativní důkaz pak může jít následujícím způsobem.

1. $k = 1$: $\varphi(p^e) = p^e - p^{e-1}$
2. $k \geq 2$: $\varphi(r \cdot s) = \varphi(r) \cdot \varphi(s)$ pro r, s nesoudělné