Princip inkluze a exkluze

Kombinatorika pro bioinformatiky (NDMI089)

RNDr. Ondřej Pangrác, Ph.D.

Motivace

Jaká je velikost sjednocení více množin, známe-li jejich průniky?

Jednoduchý příklad: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Příklad: Kolik z čísel $1, 2, \ldots, 30$ je dělitelných některým číslem z $2, 3, 5$?

Řešení: Čísel dělitelných 2 bude $\lfloor 30/2 \rfloor = 15$, dělitelných 3 $\lfloor 30/3 \rfloor = 10$ a dělitelných 5 $\lfloor 30/5 \rfloor = 6$. Dohromady $15 + 10 + 6 = 31$, to ne!
Čísla dělitelná dvěmi z $2, 3, 5$ jsme ale počítali dvakrát, je tedy třeba je odečíst. To se týká čísel dělitelných $2 \cdot 3 = 6$, těch je $\lfloor 30/6 \rfloor = 5$, dále je třeba odečíst čísla dělitelná $2 \cdot 5 = 10$, kterých je $\lfloor 30/10 \rfloor = 3$, a $3 \cdot 5 = 15$, kterých je $\lfloor 30/15 \rfloor = 2$.
Nakonec čísla dělitelná všemi třemi, ta byla třikrát přičtena a třikrát odečtena. Přičteme je tedy ještě jednou. Ve skutečnosti jde pouze o jedno číslo, neboť $\lfloor 30/(2 \cdot 3 \cdot 5) \rfloor = 1$.
Celkem nám tedy vyjde, že čísly $2, 3, 5$ je dělitelných $15 + 10 + 6 - 5 - 3 - 2 + 1 = 22$ z čísel $1, 2, \ldots, 30$.

Tvrzení

Věta (PIE)

Nechť $A_1, A_2, \dots, A_n$ *jsou konečné množiny. Potom*

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| &= |A_1| + |A_2| + \dots |A_n| - |A_1 \cap A_2| - \dots - |A_{n-1} \cap A_n| + \\ & |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots + (-1)^{n+1}|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| = \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| .\end{aligned}$$

Důkaz mat. indukcí

Důkaz: Snadno nahlédneme platnost tvrzení pro $n = 1, 2(, 3)$. Budeme tedy dokazovat indukční krok.

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right| = \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| + |A_{n+1}| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right|$$

První člen na pravé straně rozvedeme z indukčního předpokladu. Poslední člen nejprve upravíme pomocí vztahu $(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cap A_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})$ a vypoužijeme indukční předpoklad pro dvě množiny. Tím dostáváme

$$\begin{aligned}
\left|\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right| &= \left|\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right| \\
&= \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \left|\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cap A_{n+1}\right| = \\
&= \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i \in I \cup \{n+1\}} A_i\right| .
\end{aligned}$$

Důkaz mat. indukcí

Můžeme dosadit

$$
\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right| &= \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| + |A_{n+1}| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right| \\
&= \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| + |A_{n+1}| - \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i \in I \cup \{n+1\}} A_i\right| = \\
&= \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| + \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \left|\bigcap_{i \in I \cup \{n+1\}} A_i\right| + |A_{n+1}| = \\
&= \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| + \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I \cup \{n+1\}|+1} \left|\bigcap_{i \in I \cup \{n+1\}} A_i\right| = \\
&= \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n+1]} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| .
\end{aligned}
$$

$\square$

Připomenutí

Pro druhou verzi důkazu si vybereme tuto variantu tvrzení:

Věta (PIE)

Nechť $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou konečné množiny. Potom

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| .$$

Důkaz počítací

Důkaz:
Vezměme si nějaké $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ a položme $J = \{i \in [n], x \in A_i\}$ a označme $j = |J|$.
Je jasné, že na levé straně je x započteno jednou.
Na pravé straně se objeví právě v těch průnicích $\bigcap_{i \in I} A_i$ kde $I \subseteq J$.
Postupujme dle mohutnosti I:

- existuje právě j 1-prvkových indexových podmnožin obsažených v J,
- $\binom{j}{2}$ 2-prvkových atd..
- ...
- Obecně se x objeví v $\binom{j}{i}$ (pro $i \leq j$) průnicích i množin na pravé straně.

Jelikož průniky se sudými indexovými množinami se započítávají se znaménkem mínus, je na pravé straně celkem
$\binom{j}{1} - \binom{j}{2} + \ldots + (-1)^{j+1}\binom{j}{j} = 1 - \left[\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i}(-1)^i\right] = 1 - (1-1)^j = 1$ krát.

$\square$