Barevnost grafů

Kombinatorika pro bioinformatiky

9.12.2020

1 Barevnost grafů

Definice 1 *Obarvení (k-obarvení) grafu* $G = (V, E)$ *je funkce* $c : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ *taková, že pro* $\forall e \in E, e = \{u, v\}$ *platí* $c(u) \neq c(v)$.

Barevnost grafu G *je* $\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N}, \text{existuje } k\text{-obarvení } G\}$.

Pozorování 2 $\chi(G) = \max\{\chi(G'), G' \text{ komp. souvislosti } G\}$

Pozorování 3 $\chi(G) = 1 \Leftrightarrow E = \emptyset$

Tvrzení 4 G *bipartitní* $\Leftrightarrow \chi(G) = 2 \Leftrightarrow G$ *neobsahuje lichou kružnici.*

Důkaz: První ekvivalence je zřejmá.

Navíc barevnost liché kružnice je 3 a $\chi(G) \geq \chi(H)$ pro $H \subseteq G$. Na druhou stranu, nemá-li G lichou kružnici, lze jeho 2-obarvení nalézt prostým procházením do šířky v jednotlivých komponentách souvislosti.

$\square$

Definice 5 *Klikovost grafu G je* $\omega(G) = \max\{k \in \mathbb{N}, K_k \subseteq G\}$
Nezávislost grafu G je $\alpha(G) = \max\{\ell \in \mathbb{N}, K_\ell \subseteq \overline{G}\}$

Pozorování 6 $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$.

Tvrzení 7 *Pro každý graf $G = (V, E)$ platí:*

1. $\chi(G) \leq |V|$
2. $\chi(G) \geq \omega(G)$
3. $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq |V|$
4. $\chi(G) + \alpha(G) \leq |V| + 1$

Důkaz:
1.: Prosté zobrazení $c : V \to \{1, 2, \ldots, |V|\}$ je korektní obarvení G.

2.: Kombinací $\chi(K_n) = n$ a $\chi(H) \leq \chi(G)$ pro $H \subseteq G$.

3.: Uvažme obarvení G pomocí $\chi(G)$ barev. Každá třída barevnosti (množina vrcholů obarvených stejnou barvou) tvoří nezávislou množinu a tedy její velikost je nejvýše $\alpha(G)$.

4.: Pro maximální nezávislou množinu A v grafu G definujme obarvení c_A takové, že $c(v) = 1$ pro $v \in A$ a $c : V \setminus A \to \{2, 3, \ldots, |V| - |A| + 1\}$ je prosté. Takto definované obarvení je korektní obarvení grafu G a tedy $\chi(G) \leq |V| - |A| + 1 = |V| - \alpha(G) + 1$.

$\square$

Definice 8 *Graf G je d-degenerovaný pokud pro $\forall H \subseteq G$ existuje $v \in V(H)$ takový, že $deg_H(v) \leq d$.*

Tvrzení 9 *Je-li graf G d-degenerovaný, je $\chi(G) \leq d+1$.*

Důkaz: Postupujeme matematickou indukcí dle počtu vrcholů grafu $G = (V, E)$. Pro $|V| \leq d+1$ je tvrzení zřejmé.

Dále, neboť G je d-degenerovaný, obsahuje vrchol v stupně $\deg(v) \leq d$. Graf $G \setminus v$ je také d-degenerovaný, má méně vrcholů a tedy lze aplikovat indukční předpoklad. Uvažme obarvení c grafu $G \setminus v$ pomocí $d+1$ barev. Definujme obarvení c' grafu G následovně: pro $u \in V, u \neq v$ bude $c'(u) = c(u)$. Protože $\deg(v) \leq d$ existuje barva $i \in \{1, 2, \ldots, d+1\}$ kterou nemá žádný ze sousedů v. Položíme-li $c'(v) = i$, je c' korektní obarvení grafu G pomocí $d+1$ barev.

$\square$

Problém čtyř barev: Je-li graf G roviný, potom $\chi(G) \leq 4$.

Důsledek 10 *Je-li graf G roviný, pak $\chi(G) \leq 6$.*

Věta 11 *Je-li graf G roviný, pak $\chi(G) \leq 5$.*

Důkaz 1: Postupujme opět matematickou indukcí dle počtu vrcholů. Pro $|V| \leq 5$ je tvrzení zřejmé. Mějme tedy $|V| = n \geq 6$ a předpokládejme platnost tvrzení pro roviné grafy s $n-1$ vrcholy.

Protože G je roviný, existuje $v \in V, \deg(v) \leq 5$. Z indukčního předpokladu plyne, že existuje c obarvení grafu $G \setminus v$ pomocí pěti barev. Je-li $\deg(v) \leq 4$, dobarvíme vrchol v barvou, kterou nepoužívá žádný z jeho sousedů. Podobně lze obarvení rozšířit i v případě, že $\deg(v) = 5$, ale obarvení c přiřadilo dvěma sousedům v stejnou barvu.

Zbývá dořešit případ, kdy $\deg(v) = 5$ a sousedé vrcholu v mají různé barvy. Předpokládejme, že $N(v) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ v cyklickém uspořádání a $c(v_i) = i$. Definujme $V_i = \{u \in V \setminus v, c(u) = i\}$.

Pokud v grafu $G_1 = G[V_1 \cup V_3]$ jsou vrcholy v_1 a v_3 v různých komponentách souvislosti, uvažme U množinu vrcholů G_1 v komponentě spolu s v_1 a definujme $c'(u) = (u)$ pro $u \notin U$ a $c'(u) = 4 - c(u)$ pro $u \in U$. Potom $c'(v_1) = c'(v_3) = 3$ a obarvení lze rozšířit na vrchol v.

Podobně, pokud v grafu $G_2 = G[V_2 \cup V_4]$ jsou vrcholy v_2 a v_4 v různých komponentách, buď U množina vrcholů G_2 v komponentě s v_2 a $c''(u) = (u)$ pro $u \notin U$ a $c''(u) = 6 - c(u)$ pro $u \in U$. Potom $c'(v_2) = c'(v_4) = 4$ a obarvení lze rozšířit na vrchol v.

Pokud ani jedno není možné, znamená to, že vrcholy v_1 a v_3 jsou spojeny cestou požívající pouze vrcholy obarvené $1, 3$ a vrcholy v_2 a v_4 cestou s barvami $2, 4$. Protože G je roviný, musí mít tyto dvě cesty společný vrchol, jehož barva padne do množiny $\{1, 3\} \cap \{2, 4\} = \emptyset$, spor.

$\square$

Věta 12 (Apel, Haken 1976) *Je-li G roviný, pak $\chi(G) \leq 4$.*

Důkaz byl zjednodušen Roberts, Seymour, Thomas 1995, přesto zůstává hodně komplikovaný a je částečně řešen počítačem.