

1. *AND OR NOT*: Ukažte, že libovolnou Booleovskou funkci lze vyjádřit pomocí hradel AND, OR a NOT.
2. *Malá hradla*: Ukažte, že libovolnou booleovskou funkci s  $k$  vstupy lze spočítat booleovským obvodem hloubky  $\mathcal{O}(k)$  s  $\mathcal{O}(2^k)$  hradly. To speciálně znamená, že pro pevné  $k$  lze booleovské obvody s nejvýše  $k$ -vstupovými hradly překládat na obvody s 2-vstupovými hradly. Hloubka přitom vzroste pouze konstanta-krát.
3. *Libovolná abeceda*: Ukažte, jak hradlovou síť s libovolnou konstantně velkou abecedou přeložit na ekvivalentní booleovský obvod s nejvýše konstantním zpomalením. Využijte předchozí úlohy.
4. *Složité funkce*: Exponenciální velikost obvodu je nepříjemná, ale bohužel nevyhnutelná: Dokažte, že pro žádné  $k$  neplatí, že všechny  $n$ -vstupové booleovské funkce lze spočítat obvody s  $\mathcal{O}(n^k)$  hradly. Hint: kolik je booleovských funkcí, a kolik je obvodů s  $\mathcal{O}(n^k)$  hradly?
5. *Násobení*: S využitím sčítací sítě sestrojte co nejlepší síť na vynásobení dvou čísel na vstupu.
6. *Nejvyšší bit*: Sestrojte hradlovou síť hloubky  $\mathcal{O}(\log n)$  a velikosti  $\mathcal{O}(n)$ , která ve vstupní posloupnosti vynuluje všechny bity krom nejlevější jedničky, tj. například pro vstup 0110 vydá na výstupu 0100.
7. *Dělitelnost*: Ukažte, jak v logaritmické hloubce otestovat, zda je  $n$ -bitové dvojkové číslo dělitelné pěti.

8. *Rychlejší formule:* Dokažte, že každou booleovskou formuli lze přeložit na booleovský obvod jehož hloubka je logaritmická v délce formule.
9. *Pro ctitele teorie automatů:* Dokažte, že každý regulární jazyk lze rozpoznávat hradlovou sítí logaritmické hloubky. Rozmyslete si jak pomocí toho vyřešit sčítání, odčítání, porovnání dvou čísel, otestování zda je číslo na vstupu dělitelné  $k$ ...
10. *Souvislost:* Sestrojte hradlovou síť logaritmické hloubky, která dostane matici sousednosti neorientovaného grafu a rozhodne, zda je graf souvislý.