1. *Záporné cykly: Upravte Bellmanův-Fordův algoritmus, aby uměl detekovat záporný cyklus dosažitelný z vrcholu v_0. Uměli byste tento cyklus vypsat?*

   Na přednášce jste se dozvěděli, že na grafu bez záporných cyklů se Bellman-Fordův algoritmus po n fázích zastaví.[1] Rozmyslete si, že platí i opačná implikace – tj. na grafu se záporným cyklem dosažitelným z v_0 se Bellman-Fordův algoritmus nezastaví po n fázích (dokonce nikdy). Detekce je teda snadná, ale co s vypsáním?

   Pomůže nám pole předchůdců. Pokaždé když z vrcholu v zmenším ohodnocení nějakého vrcholu w nastavím `P[w] = v`. Jak budou na konci vypadat předchůdci vrcholů na záporném cyklu, který Bellman-Ford objevil? Co se stane když se podívám na libovolný otevřený vrchol po n fázích a půjdu zpět po jeho předchůdcích?

2. *FW I.: Jak z výsledku Floydova-Warshallova algoritmu zjistíme, kudy nejkratší cesta mezi nějakými dvěma vrcholy vede?*

   Předpokládáme, že graf na vstupu je bez záporných cyklů. Mějme nějaké vrcholy i a j, pro které chceme najít nejkratší cestu z výsledku Floyd-Warshallova algoritmu. Nechť k je největší takové že $D^{k-1}_{i,k} + D^{k-1}_{k,j}$ je menší než $D^{k-1}_{i,j}$, tj. naposledy kdy jsme měnili vzdálenost mezi vrcholy a tedy $D^{k-1}_{i,k} + D^{k-1}_{k,j} = D^{n}_{i,j} = \mathrm{dist}(i,j)$. Díky tomu umíme najít jeden vrchol skrz, který vede nejkratší ij-cesta. Rozmyslete si jak pomocí tohoto rekurzivně zrekonstruovat celou cestu. Kolik času nám to zabere?

   Pokud bychom chtěli nejkratší cesty rekonstruovat tak se taky může hodit pořídit matici předchůdců - tj. pamatovat si pro každé i, j poslední vrchol na nejkratší i,j cestě. Jak bychom takovou matici aktualizovali během výpočtu Floyd-Warshallova algoritmu?

   Bonus navíc - co kdybychom si dovolili dívat se jen na D^n, tj. výslednou matici vzdáleností. Jak zjistíme jestli vrchol k leží na nějaké nejkratší i, j cestě?

3. *FW II.: Upravte Floydův-Warshallův algoritmus, aby pro každý vrchol našel nejkratší kružnici, která jím prochází. Předpokládejte, že v grafu nejsou žádné záporné cykly.*

   Nastavíme $D^0_{i,i}$ na délku smyčky v bodě i nebo na ∞ pokud neexistuje. Potom necháme běžet Floyd-Warshallův algoritmus jako obvykle. Rozmyslete si, že hodnota $D^n_{i,i}$ bude obsahovat délku hledané kružnice. S využitím předchozího příkladu pak umíme kružnice vypsat.

[1] Naleznete v Průvodci labyrintem algoritmů na straně 153.