

Cvičení z Úvodu do aproximačních a pravděpodobnostních algoritmů

ZS2324 - 5. cvičení

1 Balancování grafu

Na vstupu dostaneme neorientovaný graf s nezápornými vahami na hranách. Musíme zorientovat všechny hrany. Necht' váha vrcholu je součet vah všech hran zorientovaných do něj. Cílem je hrany zorientovat tak, aby váha nejtěžšího vrcholu byla co nejnižší. (Tedy žádný vrchol nebude těžší než nějaká mez.)

Formulujte ILP, zrelaxujte jej a najděte 2-aproximaci pomocí zaokrouhlování.

2 Maximální orientovaný řez

Na vstupu dostaneme orientovaný graf s nezápornými vahami na hranách. Cílem je najít podmnožinu vrcholů S takovou, aby součet vah hran vedoucích z vrcholů v S do vrcholů mimo S byl co největší.

Navrhňte (triviální) 1/4-aproximační algoritmus. Hint: Zkuste randomizaci.

2.1 Bonus

Navrhňte ILP pro tento problém, zrelaxujte jej a vrchol v vyberte s pravděpodobností $1/4 + x_v/2$. Dává tohle 1/2-aproximaci?

3 Biased SAT

Už jsme viděli několik možných algoritmů na MaxSAT problém, ale zkusme se podívat na ještě jeden. Tento je založený na jednoduchém pozorování - Rand-SATu dělají problém klauzule s jedním literálem, ale rozhodovat se úplně podle těchto klauzulí taky nemůžeme.

První myšlenka by mohla být, že pro každou proměnnou si náhodně vybereme, zda se zaměříme na splnění klauzulí s jedním literálem, nebo ji ohodnotíme náhodně. Všimněte si, že tohle odpovídá tomu, že s pravděpodobností 3/4 ohodnotíme proměnnou tak, abychom maximalizovali počet splněných klauzulí s jedním literálem. **Zkuste spočítat, jaký aproximační poměr bude mít tento algoritmus.**

Další optimalizace ale ukazují, že optimální nastavení je trochu jiné než 3/4. Mělo by vám být jasné, kterým směrem je tuto hodnotu potřeba posunout. Algoritmus Bias-SAT ji nastavuje na $\varphi = (\sqrt{5} - 1)/2$. **Spočítejte jeho aproximační poměr.**

4 Integrality gap

Občas se nám stane, že lineární relaxace je příliš optimistická. Třeba pro vrcholové pokrytí K_3 jí stačí 3/2 vybraného vrcholu. Skutečné optimum ale zjevně potřebuje 2 vrcholy. Tímto jsme zjistili, že zaokrouhlováním budeme alespoň občas muset zvýšit počet vybraných vrcholů na 4/3 toho, co tvrdí lineární relaxace. Pokud ale (jak bývá zvykem) lineární relaxace občas může vrátit stejnou hodnotu, jako optimální řešení, tak najednou vidíme, že z této relaxace nepůjde získat lepší než 4/3-aproximační algoritmus. Tomuto jevu (a výsledné hodnotě) se říká Integrality Gap, neboli celočíselná mezera.

Dokažte, že MaxSAT má integrality gap 3/4.

Hint: Měly by vám stačit dvě proměnné a čtyři klauzule. Optimum splní tři, relaxace všechny.

Osmý domácí úkol má o dva týdny prodloužený deadline.
Devátý a desátý úkol bude zadán na příštím cvičení.

Informace

- Celkem bude zadáno deset úkolů, každý za čtyři body.
- Na vypracování máte dva týdny.
- Potřebujete alespoň 25 bodů na zápočet.
- Domácí úkoly odevzdávejte přes Sovu.

Link: <https://kam.mff.cuni.cz/owl/c/zs2324/apxr/>
Enroll token: 6de8d9714087

