Cvičení z Úvodu do aproximačních a pravděpodobnostních algoritmů

ZS2324 - 1. cvičení

1 Opakovaná mince

Osmkrát hodíme spravedlivou mincí, na které padne panna s pravděpodobností přesně 0.5. Určete pravděpodobnosti následujících jevů (stačí jako výraz, tj. mocniny, sumy, kombinační čísla, faktoriály apod. nemusíte vyhodnocovat):

1. Počet hodů, při nichž padne panna, je roven počtu hodů, kdy padl orel.
2. Víckrát padne panna než orel.
3. i-tý hod a $(9-i)$-tý hod jsou stejné pro každé $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.
4. Alespoň čtyřikrát za sebou padne panna. (Hint: Nejprve zkuste vyřešit menší počet hodů.)

2 Falešná mince

Máme falešnou „cinknutou“ minci, na které padá panna s neznámou pravděpodobností p. Pomocí více hodů touto mincí simulujte jeden hod spravedlivou mincí. Jaká je střední hodnota počtu hodů falešnou mincí?

3 Spravedlivá mince

Nyní naopak chceme simulovat falešnou minci, na níž má padnout panna s pravděpodobností p, pomocí spravedlivé mince. V každém z následujících případů se snažte určit střední hodnotu počtu hodů spravedlivou mincí.

1. $p = 1/2^k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$
2. $p = \ell/2^k$ pro nějaké $k, \ell \in \mathbb{N}$
3. $p \in \mathbb{Q}$
4. $p \in \mathbb{R}$

Hint: Hodně vám pomůže, když se vám podaří podstatně snížit potřebný počet hodů.

HW1: Počítací domácí úkol

Máme férovou čtyřstěnnou kostku s čísly 1,2,3 a 4. Kostkou pětkrát hodíme a dostaneme náhodné veličiny A, B, C, D a E.

Definujeme si následující čtyři nové náhodné veličiny:

- $W = 2A + B - 1$
- $X = A(A + C)$
- $Y = (A + B + C) \bmod 4$
- $Z = (A + C)(D + E)$

Určete:

1. Které dvojice a trojice náhodných veličin W, X, Y, Z jsou nezávislé?
2. Jaká je střední hodnota $W + X + Y + Z$?

HW2: Programovací domácí úkol

Jaká je pravděpodobnost, že během 50 hodů férovou mincí alespoň jednou padne alespoň šestkrát v řadě panna?

Spočítejte výsledek s přesností na 0.01 procentního bodu a následně simulací ověřte, že to máte správně. Popište, jak jste to udělali.

Bonusový bod dostanete, pokud to ověření pomocí simulace bude statistický test hypotézy s $\alpha = 0.05$.

Informace

- Celkem bude zadáno deset úkolů, každý za čtyři body.
- Na vypracování máte dva týdny.
- Potřebujete alespoň 25 bodů na zápočet.
- Domácí úkoly odevzdávejte přes Sovu.

Link: `https://kam.mff.cuni.cz/owl/c/zs2324/apxr/`
Enroll token: 6de8d9714087