

Čtvrté cvičení - řešení

Matej Lieskovský

Hrátky s náhodnými veličinami

Prokop hází basketbalovým míčem na koš, v každém pokusu má pravděpodobnost zásahu $1/10$, pokusy jsou nezávislé. Skončí po prvním zásahu. Označme X celkový počet hodů.

- Jaká je $P(X > k)$? – k -krát se netrefil, tedy $(9/10)^k$
- Jaká je distribuce X ? Tj. určete pravděpodobnostní funkci p_X , tj. pro každé x určete $P(X = x)$. – $X \sim \text{Geom}(1/10)$, dále viz tahák
- Jaká je $P(X \geq 10 | X \geq 5)$? – $P(X \geq 10 | X \geq 5) = P(X \geq 10 \wedge X \geq 5) / P(X \geq 5) = P(X \geq 10) / P(X \geq 5) = (9/10)^9 / (9/10)^4 = (9/10)^5$ (zajímavá vlastnost *Geom*)
- Jaká je $E(X)$? – 10 (viz tahák)

Označme $Y = X \bmod 2$, tj. $Y = 0$, pokud je X sudé, jinak $Y = 1$. Určete distribuci Y . – $Y \sim \text{Bern}(p)$ kde $p = 1/10 + 9/10(1 - p)$, tedy $p = 10/19$

Quido také hází míčem na koš, má pravděpodobnost p , že se trefí. Označme Z počet zásahů z n pokusů. Určete distribuci Z . – $Z \sim \text{Binom}(n, p)$

Kasino

Házíme opakovaně mincí. Pokud poprvé padla panna v n -tém hodu, dostaneme odměnu 2^n korun. Jaká je střední hodnota výhry? – $E(X) = \sum xP(X = x) = \sum 2^i(1/2)^i = \sum 1 = \infty$, tedy takovou hru by kasino nemělo provozovat vůbec.

Opět žárovky

Předpokládejme, že žárovka má každý den stejnou pravděpodobnost vyhoření a v průměru vydrží 100 dní. V budově je 200 žárovek, které jsou identické a vzájemně nezávislé.

- Jakým rozdělením se řídí životnost žárovky? – $\text{Geom}(1/100)$
- Jaká je pravděpodobnost, že žárovka vydrží 150 dnů? – viz tahák
- Jak dlouho vydrží 50% žárovek? – Hledáme $P(X > k) = 0.9^k = 0.5$, což nastane pro $k = \log(0.5) / \log(0.9)$
- Jaký je očekávaný počet vyhořelých žárovek za den? – 2 protože $\text{Binom}(200, 0.01)$
- Jaká je šance, že vyhoří dvakrát tolik žárovek za jeden den? – viz tahák
- V krabici se žárovkami je 15 žárovek, ale 3 z nich jsou nefunkční. Technik si s sebou vezme 3 náhodně vybrané žárovky. Jaká je pravděpodobnost, že to bude stačit na vyměnění všech žárovek, co tento den vyhoří? (Cílem je vyměnit vyhořelé žárovky za funkční žárovky.) – Rozdělíme na pravděpodobnost vyhoření 0,1,2,3 a 4+ žárovek ($\sim \text{Binom}(200, 0.01)$) a vybrání 0,1,2,3 fungujících žárovek ($\sim \text{Hypergeom}(15, 12, 3)$).

Tahák

X	$\Pr(X = k)$	$\mathbb{E}(X)$
$Bern(p)$	$\Pr(X = 1) = p, \Pr(X = 0) = 1 - p$	p
$Geom(p)$	$(1 - p)^{k-1}p$	$1/p$
$Binom(n, p)$	$\binom{n}{k}p^k(1 - p)^{n-k}$	pn
$Hypergeometric(N, K, n)$	$\frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	
$Pois(\lambda)$	$\frac{\lambda^k}{e^{-\lambda}k!}$	

Dokážete doplnit chybějící dvě hodnoty?
 Viz aktuální tahák na webu.