

Třetí cvičení - řešení

Matej Lieskovský

Věta z přednášky

Pro klasickou definici pravděpodobnosti:

$$P(A \cup B) = |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Pro diskrétní definici pravděpodobnosti:

$$P(A \cup B) = \sum_{\omega \in A \cup B} p(\omega) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) + \sum_{\omega \in B} p(\omega) - \sum_{\omega \in A \cap B} p(\omega) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Pro spojitou definici pravděpodobnosti:

$$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Písemka

Nechť A je jev „student se připravil“ a B je jev „student uspěl“.

Ze zadání víme, že:

- $P(A) = 0.6$
- $P(B|A) = 2P(B|A^C)$
- $P(A^C \wedge B^C) = 0.2$

Zajímá nás $P(B)$, ale nejdříve si spočítáme $P(B|A^C) = 1 - P(B^C|A^C) = 1 - P(B^C \wedge A^C)/P(A^C) = 1 - P(A^C \wedge B^C)/(1 - P(A)) = 0.5$

$$P(B) = P(B \wedge A) + P(B \wedge A^C) = P(B|A)P(A) + P(B|A^C)P(A^C) = 2P(B|A^C)P(A) + P(B|A^C)(1 - P(A)) = 0.8$$

Kostka

Triviální. $P(A) = 4/8 = 1/2$, $P(B) = 2/8 = 1/4$, $P(A|B) = 1/2$, $P(B|A) = 1/4$, $P(A \wedge B) = 1/8 = P(A)P(B)$ a tudíž jevy jsou nezávislé.

Míčky

Nechť A je jev „míček má na sobě proužek“ a B je jev „míček je modrý“.

Ze zadání víme, že:

- $P(A|B) = 1/2$
- $P(B|A) = 1/4$
- $P(A \wedge B) = 1/9$

Zajímá nás:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \wedge B)/P(A|B) = 2/9 \\ P(A) &= P(A \wedge B)/P(B|A) = 4/9 \\ P(A^C \wedge B^C) &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \wedge B) = 4/9 \end{aligned}$$

Dva ze tří

Důležité je si uvědomit, že prezident si už vybral a sdělení jména tuto volbu nezmění. Označme si vězně A, B, C a rozmysleme si, že existuje šest možností:

- Vybrání A, B , dozorce řekne B . ($p = 1/3$)
- Vybrání A, C , dozorce řekne C . ($p = 1/3$)
- Vybrání B, C , dozorce řekne B . ($p = q$)
- Vybrání B, C , dozorce řekne C . ($p = 1/3 - q$)

Pokud $q = 1/6$, tak vězeň A od dozorce nezíská žádnou relevantní informaci a pořád bude mít pravděpodobnost propuštění $2/3$.

Jenom pokud vězeň A už zná jména B a C a ví, že $q \neq 1/6$, tak teoreticky může získat nějakou informaci. V extrémním případě ($q = 0$) by mu dozorce mohl řeknutím B zvýšit pravděpodobnost na 1 s $p = 1/3$ nebo snížit na $1/2$ s $p = 2/3$.

Ani v extrémním případě se ale vězni nevyplatí si vyměnit místo s nejmenovaným vězněm.

Žetonky

Ve výsledku si můžeme rozmyslet dvě možnosti - buď je žetonků v sáčku hodně, nebo málo. Pokud jich je hodně, tak předpokládejme, že se poměr mezi typy žetonků vytažením jednoho žetonku významně nezmění.

Nechť tedy je podíl žetonků s nápisem "panna" p . Vytažené žetonky budeme značit P nebo O . Máme následující možnosti, co se stane:

- Padne panna, vytáhneme P - pravděpodobnost $p/2$, jedna shoda
- Padne panna, vytáhneme O - pravděpodobnost $p/2$, nula shod
- Padne orel, vytáhneme PP - pravděpodobnost $p^2/2$, nula shod
- Padne orel, vytáhneme PO - pravděpodobnost $p(1-p)/2$, jedna shoda
- Padne orel, vytáhneme OP - pravděpodobnost $(1-p)p/2$, jedna shoda
- Padne orel, vytáhneme OO - pravděpodobnost $(1-p)^2/2$, dvě shody

Celkem tedy očekáváme $p/2 + 2(p(1-p)/2) + 2((1-p)^2/2) = p/2 + (1-p) = 1 - p/2$ shod. Tudíž by bylo nejlepší mít $p = 0$.

Krátkým rozbořem případů pak můžeme ověřit, že sáčky s málo žetonky nebudou lepší, ale sáček obsahující pouhé dva žetonky označené "orel" je stejně dobrý.