

Šesté cvičení

Matej Lieskovský

1

Dokažte, že $\mathbb{E}((X - \mu)^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mu^2$.

Nechť X, Y jsou diskrétní náhodné veličiny, $a \in \mathbb{R}$. Vyjádřete následující (a dokažte správnost):

- $\text{var}(X + a)$
- $\text{var}(aX)$
- $\text{var}(X + Y)$ pokud X a Y jsou nezávislé
- $\Pr(X = 0)$ pokud $\mathbb{E}(X^2) = 0$
- rozdělení X pokud $\text{var}(X) = 0$ a $\mathbb{E}(X) = a$

Podmíněné vlastnosti

Určete podmíněnou \mathbb{E} a var pro hod obyčejnou kostkou v následujících případech:

- Padlo sudé číslo
- Padla jednička nebo šestka

Narozeniny

Jste ve skupině s dalšími 500 lidmi. Jaké je pravděpodobnost, že právě jeden z nich má narozeniny ve stejný den jako vy?

Neboli: označme X počet lidí, se stejnými narozeninami, a spočtete $p_X(1)$. Jaké je rozdělení X ? Jaká je střední hodnota? Aproximujte $p_X(1)$ pomocí Poissonova rozdělení.

(Ignorujte přestupné roky a to, že ne ve všechny dny se rodí stejně dětí.) Náповěda: můžete začít s $p_X(0)$, to je o něco snazší.

Klíče

Na kroužku máme pět klíčů, jeden z nich je správný, ale my nevíme který. Zkoušíme otevřít dveře. Kolikátým pokusem je otevřeme? Pojmenujte rozdělení a určete střední hodnotu.

- Po každém pokusu se nám kroužek vysmekne, a vybíráme vždy znovu náhodně.
- Vybíráme v náhodném pořadí, ale každý klíč jenom jednou.
- Co když v obou předchozích případech jsou správné dva klíče z desíti?

Rozdělení

Nezávislé n.v. $X_1 \sim \text{Geom}(p_1), \dots, X_n \sim \text{Geom}(p_n)$ Jaké je rozdělení $\min(X_1, \dots, X_n)$?

Náhodné vektory

Ze standardního balíčku s 52 kartami vytáhneme dvě karty. Označíme X počet vytažených es, Y počet králů. Určete sdruženou pravděpodobnostní funkci $p_{X,Y}$ a také marginální pravděpodobnostní funkce p_X, p_Y .

Tahák

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x x \Pr(X = x) \quad \mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) \quad \text{var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$