

# Cvičení z Algoritmů a Datových Struktur 1

Matej Lieskovský

LS2324 - 8. cvičení

## 1 $(a, b)$ -stromy a volba $b$ .

Odhalte, jak závisí složitost operací s  $(a, b)$ -stromy na parametrech  $a$  a  $b$ . Z toho odvoďte, že se nikdy nevyplatí volit  $b$  výrazně větší než  $2a$ .

## 2 $(a, b)$ -join.

Navrhněte operaci  $\text{Join}(X, Y)$ , která dostane dva  $(a, b)$ -stromy  $X$  a  $Y$  a sloučí je do jednoho. Můžete se přitom spolehnout na to, že všechny klíče z  $X$  jsou menší než všechny z  $Y$ . Za tohoto předpokladu zkuste dosáhnout složitosti  $O(\log |X| + \log |Y|) = O(\max\{\log |X|, \log |Y|\})$ .

## 3 Lineární konstrukce.

Ukažte, že pokud budeme do prázdného  $(a, b)$ -stromu postupně vkládat klíče  $1, \dots, n$ , provedeme celkem  $\Theta(n)$  operací. K tomu si potřebujeme pamatovat, ve kterém vrcholu skončil předchozí vložený klíč, abychom nemuseli pokaždé hledat znovu od kořene.

## 4 Intervalový update aneb ať žije (chytrá!) lenost.

Mějme BVS reprezentující slovník dvojic (klíč, hodnota), přičemž hodnoty jsou číselné. Upravte jej, aby podporoval operaci  $\text{add}(x, y, \delta)$ , která k hodnotám všech klíčů v intervalu  $[x, y]$  přičte  $\delta$ . Tato operace má běžet v  $O(\log n)$ , takže nemusíme hned provést aktualizaci hodnot všech klíčů v daném intervalu, stačí když  $\text{Find}(k)$  vrátí správnou hodnotu klíče  $k$ .

## 5 Okénkový medián.

Máme dáno přirozené  $k$  a poté na vstupu přicházejí čísla (jako posloupnost délky mnohem větší než  $k$ ). Kdykoliv přijde další, vypište medián z posledních  $k$  čísel (medián je  $\lceil k/2 \rceil$ -tý nejmenší prvek). Dosáhněte časové složitosti  $O(\log k)$  na operaci.

## 6 Jednosměrné operace.

Navrhněte úpravu operací Insert a Delete do  $(a, b)$ -stromů, aby operace procházely stromem pouze od kořene dolů a nebylo nutné jít zpět. Předpokládejte  $b \geq 2a$ .

## 7 Jen jeden bit pro AVL.

V AVL stromu je potřeba udržovat v každém vrcholu znaménko  $\{-, 0, +\}$  (udávající rozdíl hloubek podstromů), na což jsou potřeba dva bity. Ukažte, že existuje způsob, jak si vystačit s jedním bitem na vrchol.

*Bonusové úlohy:*

## 8 Malé zaplnění.

Nevýhodou  $(a, b)$ -stromů je, že plýtvají pamětí – může se stát, že vrcholy jsou zaplněné jen z poloviny. Navrhněte úpravu, která zaručí zaplnění z alespoň  $2/3$ , až na zaokrouhlování (uvažujte velké  $a, b$ ) a kromě kořene.

## 9 Levá liána a dokonalé vyvažování pomocí rotací.

Ukažte, jak pomocí rotací převést libovolný BVS na cestu, kde v kořeni je maximum, v listu minimum a každý vnitřní vrchol má jen levého syna. Jak poté v lineárním čase převést tuto cestu na dokonale vyvážený BVS, opět jen pomocí rotací?