

12. cvičení z PSt — 5.–9.5.2025

Centrální Limitní Věta

- **Centrální limitní věta:** Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou stejně rozdělené n.n.v. se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 . Označme $Y_n = ((X_1 + \dots + X_n) - n\mu)/(\sqrt{n} \cdot \sigma)$. Pak $Y_n \xrightarrow{d} N(0, 1)$. Neboli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Y_n}(x) = \Phi(x) \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}.$$

1. Měříme rychlost stahování souborů z cloudového úložiště. Každý čas stahování jednoho souboru je náhodná veličina s průměrem $\mu = 5$ minut a standardní odchylkou $\sigma = 2$ minuty. Předpokládejme, že časy stahování jednotlivých souborů jsou na sobě nezávislé, stahování probíhá jedno po druhém (tj. vždy se stahuje jen jeden soubor, hned po jeho dokončení začneme stahovat další).

(a) Pokud stáhneme 50 souborů, jaká je přibližná pravděpodobnost, že celková doba stahování přesáhne 270 minut?

(b) Jaká je přibližná pravděpodobnost, že průměrná doba stahování na soubor je kratší než 4,5 minuty?

Použijte Centrální limitní větu. Napište přesnou formuli pomocí funkce Φ a použijte tabulku na předchozí straně pro odhad.

Bodové odhady

2. Máme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n \sim U(0, \theta)$.

- (a) Navrhněte bodový odhad θ momentovou metodou.
- (b) Navrhněte bodový odhad θ metodou maximální věrohodnosti.
- (c) Pro každý z nich zjistěte, zda je nestranný a konzistentní.
- (d) Pro každý z nich spočítejte střední kvadratickou odchylku (MSE). (Stačí experimentálně na počítači.)
- (e) Který odhad je lepší? Napadá vás nějaký ještě lepší?

3. Pro náhodný výběr $X_1, \dots, X_n \sim \text{Geom}(p)$ řešte části (a)–(c) jako výše.

4. Pro náhodný výběr $X_1, \dots, X_n \sim \text{Exp}(1/\theta)$ řešte části (a)–(c) jako výše.

5. Máme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$. Zajímá nás pravděpodobnost p , že $X > 1$ pro $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. (Připomeňme, že $p = e^{-\lambda \cdot 1}$.)

- (a) Navrhněte bodový odhad p (libovolnou metodou), případně několik odhadů.
- (b) Prozkoumejte jeho vlastnosti.

Intervalové odhady

6. Máme jedno měření $X \sim N(\mu, 1)$.

- (a) Najděte intervalový odhad pro μ se spolehlivostí 95 %. (Pro konkrétnost: naměřili jsme $x = 2.9$.)
- (b) Místo jednoho měření jich provedeme n (pochopitelně nezávislých). Jaký bude teď intervalový odhad pro μ ? (Pro konkrétnost: naměřili jsme $x_1, \dots, x_9 = 1.82, 1.00, 2.50, 3.00, 0.50, 2.97, 1.76, 1.35, 3.41$.)
- (c) Nechť X má stále střední hodnotu μ a rozptyl 1, ale není už nutně normální. Co se změní?

7. Tentokrát vybíráme z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$: μ ani σ neznáme. Naměřili jsme hodnoty 8.47, 10.91, 10.87, 9.46, 10.40.

- (a) Spočítejte výběrový průměr a výběrový rozptyl.
- (b) Kdybychom věřili, že spočtený výběrový rozptyl je skutečná hodnota σ^2 , najděte intervalový odhad pro μ .
- (c) Najděte intervalový odhad pro μ použitím Studentova t -rozdělení.

8. Počet emailů za den modelujeme pomocí Poissonova rozdělení $Pois(\lambda)$. První týden v květnu jsme dostali 34, 35, 29, 31, 30 emailů. Najděte pro λ intervalový odhad se spolehlivostí 95 %.

Použijte k tomu poslední metodu z přednášky – tu využívající Studentova rozdělení. (Poissonovo rozdělení sice není normální, ale pro dostatečně vysokou hodnotu λ je normálnímu dost podobné, metoda bude mít spolehlivost blízkou 95 %.)

p	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
$\Phi^{-1}(p)$	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58
$\Psi_1^{-1}(p)$	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66
$\Psi_2^{-1}(p)$	1.89	2.92	4.3	6.96	9.92
$\Psi_4^{-1}(p)$	1.53	2.13	2.78	3.75	4.6
$\Psi_8^{-1}(p)$	1.4	1.86	2.31	2.9	3.36
$\Psi_{20}^{-1}(p)$	1.33	1.72	2.09	2.53	2.85
$\Psi_{30}^{-1}(p)$	1.31	1.7	2.04	2.46	2.75

K procvičení

9. Nechť $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ popisuje dráhu, kterou uletí radioaktivní částice, nechť se rozpadne. Náš přístroj její rozpad (a polohu rozpadu, tj. hodnotu X) zachytí, ale jen pokud $1 \leq X \leq 2$. Formálně, budeme zkoumat náhodný výběr $X_1, \dots, X_n \sim F_{X|B}$ pro jev $B = 1 \leq X \leq 2$.

- (a) Navrhněte bodový odhad λ momentovou metodou.
- (b) Navrhněte bodový odhad λ metodou maximální věrohodnosti.
- (c) Pro každý z nich zjistěte, zda je nestranný a konzistentní.

10. Máme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n \sim \text{Pois}(\lambda)$.

- (a) Navrhněte bodový odhad λ momentovou metodou.
- (b) Navrhněte bodový odhad λ metodou maximální věrohodnosti.
- (c) Spočtete střední kvadratickou odchylku (MSE).