8. cvičení z PSt — 7.–11.4.2025

Název	Hustota	Distribuční funkce	Střední hodnota	Rozptyl
Uniformní $U(a,b)$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponenciální $Exp(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$1-e^{-\lambda x}$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
Stand.norm. $N(0,1)$	$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$	Φ	0	1
Normální $N(\mu,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sigma}\varphi(\frac{x-\mu}{\sigma})$	$\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$	μ	σ^2

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\Phi(x)$	0.00003	0.00135	0.02275	0.15866	0.500000	0.84135	0.97725	0.99865	0.99997

Další hodnoty viz `https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_normal_table` – sekce Cumulative.

Z každé kapitolky zkuste aspoň jeden příklad! Pokud se zaseknete, na konci jsou některé nápovědy.

Uniformní rozdělení

1. Předpokládejme, že tramvaj jezdí pravidelně každých 10 minut, ale ne nutně podle jízdního řádu (jsou všechny zpožděné). (a) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat více než 4 minuty?

(b) Jaká je střední doba čekání? Jaká je směrodatná odchylka?

Exponenciální rozdělení

2. Předpokládejme, že u poštovní přepážky trvá vyřízení jednoho zákazníka čas, který má exponenciální rozdělení a střední hodnotu 4 minuty.

(a) Jaký je parametr λ, jaká je distribuční funkce?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat více než 4 minuty?

(c) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat něco mezi 3 a 5 minutami?

3. Říkáme, že náhodná veličina X (resp. její rozdělení) *nemá paměť*, pokud

$$P(X > s+t \mid X \geq s) = P(X > t)$$

pro $s, t \geq 0$. Jinými slovy, doba, kterou jsme již čekali, nemá vliv na dobu, kterou budeme ještě čekat. Na třetím cvičení jsme viděli, že geometrické rozdělení nemá paměť.

(a) Ukažte, že ani exponenciální rozdělení nemá paměť. Platí dokonce, že je to jediné spojité rozdělení na kladných čísel bez paměti (a geometrické je jediné diskrétní bez paměti), ale to dokazovat nemusíte.

(b) Využijte toho na výpočet $\mathbb{E}(X \mid X \geq 1)$ pro $X \sim Exp(\lambda)$.

(c) * Využijte toho na výpočet $\mathbb{E}(X^2 \mid X \geq 1)$ pro $X \sim Exp(\lambda)$.

4. Doba trvání ústní zkoušky má exponenciální rozdělení se střední hodnotou 20 minut. Objednáni jsou dva studenti, Adam na 10:00, Blanka na 10:20. Pokud se zkoušení Adama protáhne, zkoušení Blanky začne až bude Adam hotový, jinak začne přesně v 10:20.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že když Blanka přijde, bude Adam už vyzkoušený?

(b) Jaká je střední hodnota času, po který bude muset Blanka čekat na dozkoušení Adama, pokud při jejím příchodu ještě Adam nebyl vyzkoušený?

(c) Jaká je střední hodnota času, kdy začne zkoušení Blanky?

(d) Jaká je střední hodnota času, kdy bude Blanka vyzkoušená?

Normální rozdělení

5. Nechť $Z \sim N(0,1)$. Pomocí tabulky funkce Φ ověřte pravidlo 3σ, neboli spočtěte
(a) $P(|Z| \leq 1)$
(b) $P(|Z| \leq 2)$
(c) $P(|Z| \leq 3)$
(d) Přepište, co to znamená pro n.v. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

6. Budeme modelovat množství sněhu, který bude na Silvestra v lyžarském areálu Ještěd, pomocí normálního rozdělení se střední hodnotou 40 (centimetrů) a směrodatnou odchylkou 10.
(a) Jaká je pravděpodobnost, že nám model určí zápornou hodnotu sněhové pokrývky?
(b) Jaká je pravděpodobnost, že sněhu napadne 50–70 cm?

Práce s distribuční funkcí

7. Metrový klacek rozlomíme na dva kusy – lomem v uniformně náhodném bodě. Buď X délka delší části.
(a) Jaké je rozdělení X?
(b) Určete $\mathbb{E}(X)$.

8. Pro jistý problém máme k dispozici dva algoritmy, A a B. Algoritmus C spočívá v tom, že si náhodně vybereme, který z algoritmů A, B spustíme – A bude mít pravděpodobnost p, B pravděpodobnost $1-p$. Dobu běhu A, B, C chápeme jako náhodné veličiny, označíme je X, Y, Z.
(a) Určete F_Z pomocí F_X, F_Y.
(b) Pokud jsou X, Y spojité, určete f_Z pomocí f_X, f_Y.

Nápovědy

2, 3a: použijte vzorec pro distribuční funkci exponenciálního rozdělení.
3bc: jaké je rozdělení $X-1$ za předpokladu $X \geq 1$?
4: b: použijte příklad 3, c: věta o celkové střední hodnotě, d: linearita
5: Potřebujete vždy odečíst dvě vhodné hodnoty v tabulce na první stran 2.
6: Převeďte na tvrzení o náhodné veličině $N(0,1)$.
7: Spočtěte napřed distribuční funkci X, pak její hustotu.
8: Věta o celkové pravděpodobnosti platí i tady.

K procvičení

9. Házíme na terč – kruh o poloměru 1. Předpokládejme, že každý bod v terči má stejnou pravděpodobnost zásahu, přesněji, každá jeho podmnožina má pravděpodobnost úměrnou své ploše. Označme X vzdálenost od středu. (a) Najděte distribuční funkci F_X. (b) Najděte hustotní funkci f_X. (c) Zjistěte $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{var}(X)$, σ_X.

10. $X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(1,4)$.
(a) Najděte lineární funkci $f(t) = a \cdot t + b$, aby $f(Y)$ měla stejnou distribuci jako X.
(b) Spočtěte $P(X \leq 1)$, $P(X > 2)$.
(c) Spočtěte $P(Y < 0)$, $P(Y > 2)$.

11. Frantovi jsme ve skoku do dálky naměřili 9 metrů, což překonává světový rekord o 5 cm. Při měření jsme se ovšem dopustili chyby s rozdělením $N(0, 0.01)$. Jaká je pravděpodobnost, že byl rekord skutečně překonán?

12. Nechť $X \sim N(0,1)$ a $Y = |X|$. Určete $\mathbb{E}(Y)$ a $\mathrm{var}(Y)$.