

7. cvičení z PSt — 31.3.–4.4.2025

Připomeňte si, že distribuční funkce F_X je definována vztahem

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

Pokud je X spojitá, tak

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

pro nezápornou funkci f_X (hustotu X). Pak je

$$P(X \in A) = \int_A f_X(t) dt, \quad \text{tedy zejména} \quad P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(t) dt$$

Platí také $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$ a obecněji

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) f_X(t) dt.$$

Stejně jako pro diskrétní n.v. platí i zde, že $\text{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.

Připomeňte si, jak se počítá určitý integrál pomocí primitivní funkce.

Používání F a f

1. Pro n.v. X s distribuční funkcí F_X vyjádřete

$$(a) P(X \in (0, 1]) \quad (b) P(X > 0) \quad (c) * P(X < 0) \quad (d) * P(X \in [0, 1])$$

2. Vyřešte předchozí část znovu, pro n.v. X s hustotou f_X .

3. Nechť X splňuje $P(X = x) = 0$ pro každé x . (Rozmyslete si, že to není nic divného, a že se to děje pro každou spojitou náhodnou veličinu.)

Vyjádřete pomocí F_X distribuční funkci náhodných veličin

$$(a) -X. \quad (b) X^+ = \max(0, X), \quad (c) |X|.$$

4. Buď X náhodná veličina s hustotou $f_X(t) = 1/t^2$ pro $t \geq 1$ a $f_X(t) = 0$ jinak.

- (a) Ověřte, že se jedná o hustotu.
- (b) Určete $\mathbb{E}(X)$.
- (c) Spočtete distribuční funkci F_X .
- (d) Určete $P(2 \leq X \leq 3)$.
- (e) Buď $Y = 1/X$. Jaká je distribuční funkce náhodné veličiny Y ?
- (f) Určete hustotu náhodné veličiny Y .

5. Říkáme, že X má exponenciální rozdělení, $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, pokud

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{pro } x \geq 0, \text{ jinak } 0.$$

Nalezněte f_X . Na přednášce si ukážeme, že $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$.

6. Předpokládejme, že u poštovní přepážky trvá vyřízení jednoho zákazníka čas, který má exponenciální rozdělení a střední hodnotu 4 minuty.

- (a) Jaký je parametr λ , jaká je distribuční funkce?
- (b) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat více než 4 minuty?
- (c) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat něco mezi 3 a 5 minutami?

K procvičení

7. Nechť F_X je dána předpisem $F_X(x) = x/3$ pro $x \in [0, 3]$, $F_X(x) = 0$ pro $x < 0$ a $F_X(x) = 1$ pro $x > 3$. Nechť $Y = 1/X$ a $Z = X^2$. Spočtete

(a) $P(1 \leq X \leq 2)$ (b) $P(X \leq Y)$ (c) $P(X \leq Z)$ (d) hustotní funkci f_X . (e) distribuční funkce F_Y a F_Z .

8. Střední doba života harddisku je 4 roky. Předpokládejme, že tato doba je popsána náhodnou veličinou s exponenciálním rozdělením. (To není realistický předpoklad, viz např. <https://www.backblaze.com/blog/how-long-do-disk-drives-last/>.)

- (a) Jaká je pravděpodobnost, že disk selže během prvních tří let?
- (b) Jaká je pravděpodobnost, že vydrží alespoň 10 let?
- (c) Po jaké době se rozbije 10 % disků?

9. Plutonium-238 má poločas rozpadu 87.7 let. Jeho rozpad budeme modelovat pomocí exponenciálního rozdělení: pro každý atom budeme čas, za který se rozpadne, považovat za nezávislou náhodnou veličinu s rozdělením $\text{Exp}(\lambda)$.

- (a) Jaké je λ ?
- (b) Jaká je střední doba života atomu plutonia-238?
- (c) Po jaké době se rozpadne 90 % atomů?
- (d) Kolik procent atomů se rozpadne po 50 letech? (Některé kardiostimulátory používají plutonium-238 jako zdroj energie. https://en.wikipedia.org/wiki/Plutonium-238#Nuclear_powered_pacemakers)

10. Doba, za kterou uvidíme meteor, je exponenciálně rozdělená se střední hodnotou 1 (minuta).

- (a) Jaká je pravděpodobnost, že budeme muset čekat více než 5 minut?
- (b) Jaká je pravděpodobnost, že se dočkáme za nejvýše jednu minutu?
- (c) * Jaké je rozdělení času, kdy uvidíme druhý meteor? Třetí, ... (Předpokládáme, že jednotlivé meteory jsou navzájem nezávislé.)

Náhodné vektory (z minulého cvičení)

Sdružená pravděpodobnostní funkce je definována vztahem $p_{X,Y}(x, y) = P(X = x \& Y = y)$. „Jednorozměrné funkce“ p_X, p_Y se v tomto kontextu nazývají marginální pravděpodobnostní funkce. Připomeňte si, jak je zjistit z $p_{X,Y}$.

11. Označme X, Y výsledky dvou nezávislých hodů čtyřstěnnou kostkou (s čísly 1, ..., 4).

- (a) Jaká je pravděpodobnostní funkce $Z_1 = \max(X, Y)$?
- (b) Jaká je pravděpodobnostní funkce $Z_2 = X + Y$?
- (c) Jaká je pravděpodobnostní funkce $Z_3 = XY$?

[Nápověda: Jakých hodnot nabývá vektor (X, Y) , pokud $\max(X, Y) = k$? Resp. v dalších částech, pokud $X + Y = k$, resp. $XY = k$?]

- 12. (a) V předchozím příkladu: je větší $\mathbb{E}(Z_2)$ nebo $\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$? Spočtete obojí podle definice.
- (b) V předchozím příkladu: je větší $\mathbb{E}(Z_3)$ nebo $\mathbb{E}(X^2)$? Spočtete obojí podle definice.

13. Nezávislé n.v. $X_1, \dots, X_n$ mají geometrické rozdělení s parametry $p_1, \dots, p_n$. Jaké je rozdělení n.v. $M = \min(X_1, \dots, X_n)$?