6. cvičení z PSt — 24.–28.3.2025

Podmíněná střední hodnota

1. V kvízu je 20 otázek s volbami a,b,c,d. Za správnou odpověď (vždy je jen jedna odpověď správná) je 1 bod, za špatnou $-1/4$ bodu, za nevyplněnou otázku nula. Každá otázka je s pravděpodobností q jednou z těch, co se Kvído naučil a tedy zná správnou odpověď. Pokud správnou odpověď nezná, ví o tom, a může se rozhodnout, zda tipovat.

(a) Jaká je střední hodnota počtu bodů, které Kvído získá, pokud bude odpovídat jenom otázky, u kterých zná odpověď?

(b) A co když bude tipovat, když nezná správnou odpověď?

(c) Jak by se musela změnit penalizace za chybnou odpověď, aby byly odpovědi v částech a, b stejné?

2. Můj počítač občas zlobí: každý den s pravděpodobností p zamrzne. Když se to stane dva dny po sobě, začnu to řešit. Jaký je střední počet dnů, než se to stane?

Poznávačka náhodných veličin

3. Pravděpodobnost, že do našeho serveru pronikne hacker je během každého dne 0.01, nezávisle pro každý den. Označme T počet dnů do prvního průniku. Jaké je rozdělení T, $\mathbb{E}(T)$, $\mathrm{var}(T)$? Jaká je pravděpodobnost, že server zůstane bezpečný po celý rok?

4. Každý test programu může skončit buď nalezením chyby (úspěch) nebo ne (neúspěch). Předpokládáme, že pravděpodobnost nalezení chyby při jednom testu je 0.05 a vývojář provede 20 nezávislých testů, označíme X počet nalezených chyb. Jaké je rozdělení X, $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{var}(X)$? Jaká je pravděpodobnost, že nalezne právě tři chyby?

5. Historická data ukazují, že náš server obdrží průměrně 30 žádostí za minutu. Použijte Poissonovo rozdělení k určení pravděpodobnosti, že server obdrží přesně 40 žádostí v následující minutě.

Název	Pravděpodobnostní funkce	Rozsah (ImX)	Střední hodnota	Rozptyl
Bernoulliho (p)	$p_X(1) = p$, $p_X(0) = 1-p$	$\{0,1\}$	p	$p(1-p)$
Binomické (n,p)	$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$\{0,1,\dots,n\}$	np	$np(1-p)$
Geometrické (p)	$p_X(k) = (1-p)^{k-1} p$	$\{1,2,\dots\}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poissonovo (λ)	$p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	$\{0,1,\dots\}$	λ	λ
Uniformní (a,b)	$p_X(k) = \frac{1}{b-a+1}$	$\{a, a+1, \dots, b\}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$

Rozptyl

Připomenutí:

- definice $\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$
- věta $\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$
- věta $\mathrm{var}(aX+b) = a^2 \,\mathrm{var}(X)$
- věta $\mathrm{var}(X+Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y)$ (pokud $X \perp Y$)
- odvozené veličiny: směrodatná odchylka $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{var}(X)}$
- variační koeficient $CV_X = \sigma_X / \mathbb{E}(X)$ (pokud $\mathbb{E}(X) > 0$)

6. Nechť $X \sim Bin(100, 0.5)$, $Y = 10X$ a $Z \sim 10Bin(100, .05)$ (tedy $Z/10$ má binomické rozdělení $Bin(100, .05)$). Spočtěte (využitím vzorců z přednášky) $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{var}(X)$, σ_X, CV_X a totéž pro Y, Z.

7. Nechť $X \sim Poi(\lambda)$. Připomeňte si odvození $\mathbb{E}(X) = \lambda$. Odvoďte obdobně $\mathrm{var}(X) = \lambda$. [Návod: je užitečné napřed spočíst $\mathbb{E}(X(X-1))$.]

Náhodné vektory

Sdružená pravděpodobnostní funkce je definována vztahem $p_{X,Y}(x, y) = P(X = x \,\&\, Y = y)$. „Jednorozměrné funkce“ p_X, p_Y se v tomto kontextu nazývají marginální pravděpodobnostní funkce. Připomeňte si, jak je zjistit z $p_{X,Y}$.

8. Označme X, Y výsledky dvou nezávislých hodů čtyřstěnnou kostkou (s čísly 1, ..., 4).

(a) Jaká je pravděpodobnostní funkce $Z_1 = \max(X, Y)$?

(b) Jaká je pravděpodobnostní funkce $Z_2 = X + Y$?

(c) Jaká je pravděpodobnostní funkce $Z_3 = XY$?

[Nápověda: Jakých hodnot nabývá vektor (X, Y), pokud $\max(X, Y) = k$? Resp. v dalších částech, pokud $X + Y = k$, resp. $XY = k$?]

9. (a) V předchozím příkladu: je větší $\mathbb{E}(Z_2)$ nebo $\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$? Spočtěte obojí podle definice.

(b) V předchozím příkladu: je větší $\mathbb{E}(Z_3)$ nebo $\mathbb{E}(X^2)$? Spočtěte obojí podle definice.

10. Nezávislé n.v. $X_1, \ldots, X_n$ mají geometrické rozdělení s parametry $p_1, \ldots, p_n$. Jaké je rozdělení n.v. $M = \min(X_1, \ldots, X_n)$?

K procvičení

11. V tabulce je sdružená pravděpodobnostní funkce náhodných veličin X, Y. Jiné než vyznačené hodnoty tyto veličiny nenabývají.

$x \backslash y$	0	1	2
0	1/4	1/6	1/12
1	1/6	1/4	1/12

(a) Najděte marginální rozdělení X i Y. Spočtěte $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$.

(b) Jsou X a Y nezávislé? Neboli: platí $p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$?

(c) Popište rozdělení $X + Y$ – tj. nalezněte pravděpodobnostní funkci n.v. $X+Y$. Spočtěte odsud $\mathbb{E}(X+Y)$ – ověřte, zda se to rovná $\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)$.

(d) Popište rozdělení $X \cdot Y$. Spočtěte odsud $\mathbb{E}(XY)$ – ověřte, zda se to rovná $\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

12. Hodíme třikrát mincí. Označíme X počet rubů v prvních dvou hodech a Y počet líců v posledních dvou hodech.

(a) Určete sdruženou pravděpodobnostní funkci $p_{X,Y}$ a také marginální pravděpodobnostní funkce p_X, p_Y.

(b) Jsou X a Y nezávislé?

(c) Určete $P(X < Y)$.

(d) Určete podmíněnou pravděpodobnostní funkci $p_{X|Y}$, tj. čísla $P(X = x \mid Y = y)$ pro všechny hodnoty x, y.

13. Na kostce padne číslo i s pravděpodobností p_i pro $i = 1, \ldots, 6$. Hodíme n-krát a označíme X_i počet hodů, kdy padlo i. (a) Najděte sdruženou pravděpodobnostní funkci pro n.v. $X_1, \ldots, X_n$.

(b) Jaké je marginální rozdělení, tj. rozdělení jednotlivých n.v. X_i?

Bonus

14. Uvažme skupinu m manželských párů (tj. celkem $2m$ osob). Předpokládejme, že po deseti letech bude každý z těch $2m$ lidí stále naživu s pravděpodobností p, nezávisle na ostatních. Možnosti rozvodů apod. neuvažujeme, tj. páry jsou neměnné.

Označme L množinu lidí, kteří budou po deseti letech naživu a A jejich počet (tj. $A = |L|$). Dále buď B počet párů, kde budou naživu oba; tj. A, B jsou náhodné veličiny splňující $0 \le A \le 2m$ a $0 \le B \le m$. Pro každé $a = 0, \ldots, 2m$ určete $\mathbb{E}(B \mid A = a)$.