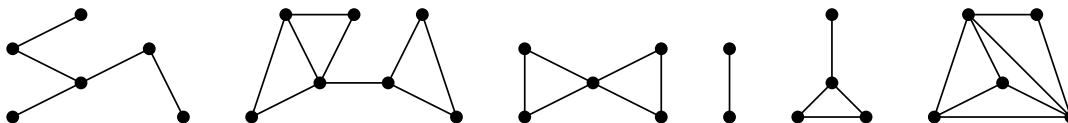


Hranová a vrcholová souvislost

Připomenutí: Necht' $G = (V, E)$ je graf s $n \geq 2$ vrcholy.

- **Hranová souvislost** grafu G je $k_e(G) = \min \{|F| : F \subseteq E, \text{graf } (V, E \setminus F) \text{ je nesouvislý}\}$. Řekneme, že graf G je k -*hranově souvislý* pokud $k_e(G) \geq k$.
- **Vrcholová souvislost** grafu G je $k_v(G) = \min \{|A| : A \subseteq V, \text{graf } G[V \setminus A] \text{ je nesouvislý}\} \cup \{|V| - 1\}$, kde $G[V \setminus A]$ je graf indukovaný vrcholy v $V \setminus A$. Řekneme, že graf G je k -*vrcholově souvislý* pokud $k_v(G) \geq k$.
- **Mengerova věta:** Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí:
 - $k_e(G) \geq k \iff \forall u, v \in V, u \neq v, \exists$ alespoň k hranově disjunktních cest mezi u a v .
 - $k_v(G) \geq k \iff \forall u, v \in V, u \neq v, \exists$ alespoň k (vnitřně) vrcholově disjunktních cest mezi u a v .
- **Lemma o uších:** Graf G je vrcholově 2-souvislý $\iff G$ lze sestavit z cyklu lepením uší.

1 Určete hranovou a vrcholovou souvislost následujících šesti grafů.



2 Najděte graf G , který má vrcholovou souvislost 1 a hranovou souvislost 10.

3 Najděte příklad grafu G a vrcholu $v \in V(G)$ takového, že odebráním v z G :

- klesne hranová souvislost G o 10.
- vzroste hranová souvislost G o 10.
- vzroste vrcholová souvislost G o 10.
- (Bonus) O kolik nejvíce může klesnout vrcholová souvislost odebráním jednoho vrcholu?

4 Necht' G je vrcholově k -souvislý graf.

- Necht' $A \subseteq V(G)$ je množina vrcholů velikosti k . Sestavme graf G' z grafu G přidáním nového vrcholu z , a hran mezi z a vrcholy v A . Formálně,

$$G' = (V(G) \cup \{z\}, E(G) \cup \{\{z, a\} \mid a \in A\}), \text{ kde } z \notin V(G).$$

Dokažte, že G' je vrcholově k -souvislý.

- Dokažte, že pro každý vrchol $v \in V(G)$ a množinu vrcholů $A \subseteq V(G) \setminus v$ velikosti k existuje k cest mezi v a vrcholy množiny A , které jsou vrcholově disjunktní až na vrchol v .

5 Dokažte, že každý vrcholově k -souvislý graf na alespoň $2k$ vrcholech obsahuje cyklus délky alespoň $2k$. (Nápověda: Použijte předchozí příklad.)

6 Necht' G je libovolný graf na $2n$ vrcholech, jehož každý vrchol má stupeň alespoň n . Dokažte, že G je hranově n -souvislý.

2-vrcholově souvislé grafy a Lemma u uší

- 7** Dokažte, že v každém 2-vrcholově souvislém grafu G lze zorientovat hrany (tj. nahradit každou hranu orientovanou hranou) tak, že pro každé dva vrcholy $x, y \in V(G)$ bude v G existovat orientovaná cesta z x do y .
- 8** Necht' G je vrcholově 2-souvislý graf takový, že žádný z grafů $G - e$ pro libovolné $e \in E(G)$ není vrcholově 2-souvislý. (Takovým grafům se říká *kriticky 2-souvislé*.)
- a) Dokažte, že alespoň jeden vrchol G má stupeň 2.
 - b) Pro každé $n \geq 2$ uveďte příklad kriticky 2-souvislého grafu s vrcholem stupně alespoň n .
- 9** Necht' G je vrcholově 2-souvislý graf. **Bez použití Mengerovy věty** dokažte, že pro libovolné dva různé vrcholy x a y v G existuje cyklus obsahující oba vrcholy.