

Hallova věta

Připomenutí:

- *Párování* v grafu $G = (V, E)$ je množina M navzájem disjunktních hran z E . Párování M je *perfektní*, pokud $\forall v \in V \exists e \in M: v \in e$ (neboli $|M| = |V|/2$).
- **Hallova věta (verze pro bipartitní grafy):** Nechť $G = (A \cup B, E)$ je bipartitní graf. G má párování velikosti $|A|$ (tj. nasycující partitu A) právě tehdy, když

$$\forall A' \subseteq A: |N_G(A')| \geq |A'|.$$

- 1 Nechť $G = (A \cup B, E)$ je k -regulární bipartitní graf (tj. každý vrchol má stupeň k).
 - a) Dokažte, že partity grafu G mají stejnou velikost (tj. $|A| = |B|$).
 - b) Dokažte, že G má perfektní párování.
 - c) Dokažte, že hrany G lze obarvit k barvami tak, aby hrany stejné barvy neměly společný vrchol.
- 2 Na políčkách šachovnice je položeno několik věží tak, že v každém řádku i každém sloupci je stejný (nenulový) počet věží. Lze za této situace odebrat ze šachovnice několik věží tak, aby se věže navzájem neohrožovaly a současně v každém řádku a sloupci zůstala jedna věž?
- 3 Najděte nekonečný bipartitní graf $G = (A \cup B, E)$ s partitami $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ a $B = \{b_1, b_2, \dots\}$, ve kterém je splněna Hallova podmínka a přesto nemá párování nasycující A .
- 4 (**Deficitní Hallova věta**) V bipartitním grafu $G = (A \cup B, E)$ pro každou podmnožinu $A' \subseteq A$ platí $|N_G(A')| \geq |A'| - 1$. Dokažte, že v G existuje párování velikosti $|A| - 1$.
- 5 Nechť $G = (A \cup B, E)$ je bipartitní graf. Dokažte, že pokud $n := |A| = |B|$ vrcholů a každý vrchol má stupeň alespoň $n/2$, tak G obsahuje perfektní párování.
- 6 (Bonus) Dokažte, že Hallova věta implikuje Kőnig-Egerváryho větu.

Systémy různých reprezentantů

Připomenutí: Necht' X a I jsou konečné množiny.

- *Množinový systém na X* je libovolná $|I|$ -tice podmnožin X , tj. $\mathcal{M} = (M_i : i \in I)$, kde $M_i \subseteq X$.
- *Systém různých reprezentantů (SRR)* je prostá funkce $f : I \rightarrow X$ taková, že pro každé $i \in I$ je $f(i) \in M_i$.
- **Halova věta (verze pro množinové systémy):** Množinový systém $\mathcal{M} = (M_i : i \in I)$ má SRR právě tehdy, když pro každou podmnožinu $J \subseteq I$ platí $\left| \bigcup_{j \in J} M_j \right| \geq |J|$.

7 Rozhodněte, zda existuje 6 obdélníků, které mají současně:

- navzájem různé obsahy, a to 21, 22, 23, ..., 26,
- celočíselné délky všech stran a
- navzájem různé jednociferné šířky. (Výšky mohou být stejné.)

8 *Latinský čtverec řádu n* je tabulka $n \times n$ vyplněná čísly $1, 2, \dots, n$ tak, že v každém řádku a každém sloupci se každé číslo vyskytuje jednou.

- a) Dokažte, že pokud vyplníme první dva řádky čísly $1, 2, \dots, n$ tak, že se v řádcích ani sloupcích čísla neopakují, pak můžeme dovyplnit i zbývající políčka tak, aby vznikl latinský čtverec.
- b) Dokažte, že latinských čtverců řádu 30 je více než 10^{90} .

9 Rozmyslete si, že výše uvedené verze Hallovy věty jsou ekvivalentní.

Další příklady na aplikaci Hallovy věty

10 a) Má množinový systém $\mathcal{M}_4 = (\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\})$ tvořený všemi 3prvkovými podmnožinami množiny $\{a, b, c, d\}$ systém různých reprezentantů (SRR)?

b) Má množinový systém $\mathcal{M}_5$ tvořený všemi 3prvkovými podmnožinami množiny $\{a, b, c, d, e\}$ SRR?

c) Najděte systém $\mathcal{M}_6$ nějakých šesti 3prvkových podmnožin $\{a, b, c, d, e, f\}$, který nemá SRR.

11 Soupeř zamíchal standardní balíček 52 karet a rozdál karty do 13 hromádek po 4. Rádi bychom z každé hromádky vzali jednu kartu tak, abychom měli jedno eso, 2, 3, ..., krále. Jde to vždy provést?

12 Na zkoušku přijde 100 studentů a 25 zkoušejících. Každý student má oblíbených alespoň 10 z přítomných zkoušejících. Každý student má být zkoušen právě jedním zkoušejícím.

Dokažte, že existuje rozvrh zkoušení, kde každý student bude zkoušen jedním ze svých oblíbených zkoušejících a každý zkoušející bude zkoušet maximálně 10 studentů.

13 Skupina $n \geq 3$ matfyzáků si v cukrárně objednala n různých zákusků. Až když je obsluha donesla, ukázalo se, že každý matfyzák je alergický na 2 zákusky (každý na jinou dvojici). Dokažte, že si matfyzáci můžou zákusky rozdělit tak, že každý dostane zákusek, na který není alergický.